

本資料のうち、枠囲みの内容は、営業秘密又は防護上の観点から公開できません。

東海第二発電所 工事計画審査資料	
資料番号	工認-668 改5
提出年月日	平成30年10月1日

V-5-10 計算機プログラム（解析コード）の概要・F L I P

目次

1.	はじめに	1
1.1	使用状況一覧	2
2.	解析コードの概要	4
3.	解析理論	6
3.1	支配方程式	6
3.2	構成則	13
4.	解析フローチャート	16
5.	FLIPの変更履歴	17
6.	本解析で使用する要素の概要	20
6.1	線形はり要素	20
6.2	線形平面要素	27
6.3	非線形はり要素	28
6.4	非線形ばね要素	31
6.5	ジョイント要素	35
6.6	流体要素、流体-構造連成要素	41
6.7	粘性要素(側方地盤境界、底面地盤境界)	43
6.8	節点集中質量要素	45
6.9	修正武田モデル	46
6.10	杭-地盤相互作用ばねモデル	48
7.	線形はり要素の検証	53
7.1	概要	53
7.2	例題	53
7.3	検証結果	54
8.	修正武田モデルの検証	55
8.1	概要	55
8.2	例題	55
8.3	例題結果(検証結果)	56
8.4	軸力の変動が部材の非線形特性に与える影響(取水構造物の耐震安全評価に関する参考資料)	60
9.	杭-地盤相互作用ばねモデルの検証	63
9.1	概要	63
9.2	杭と周辺地盤の相互作用	63
9.3	解析結果	64

1. はじめに

本資料は、添付書類において使用した計算機プログラム（解析コード）FLIPについて説明するものである。

本解析コードを使用した添付書類を示す使用状況一覧、解析コードの概要を以降に記載する。

1.1 使用状況一覧

使用添付書類		バージョン
V-1-1-6-別添1	可搬型重大事故等対処設備の保管場所及びアクセスルート	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-5	使用済燃料乾式貯蔵建屋の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-6	取水構造物の地震応答計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-7	取水構造物の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-8	屋外二重管の地震応答計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-9	屋外二重管の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-11	緊急時対策所建屋の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-12	緊急時対策所用発電機燃料油貯蔵タンク基礎の地震応答計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-13	緊急時対策所用発電機燃料油貯蔵タンク基礎の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-20	格納容器圧力逃がし装置用配管カルバートの地震応答計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-21	格納容器圧力逃がし装置用配管カルバートの耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-22-1	常設代替高圧電源装置置場及び西側淡水貯水設備の地震応答計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-22-2	常設代替高圧電源装置用カルバート（カルバート部）の地震応答計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-22-3	常設代替高圧電源装置用カルバート（トンネル部）の地震応答計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-22-4	常設代替高圧電源装置用カルバート（立坑部）の地震応答計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-23-1	常設代替高圧電源装置置場及び西側淡水貯水設備の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-23-2	常設代替高圧電源装置用カルバート（カルバート部）の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-23-3	常設代替高圧電源装置用カルバート（トンネル部）の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-23-4	常設代替高圧電源装置用カルバート（立坑部）の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-24	可搬型設備用軽油タンク基礎の地震応答計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-25	可搬型設備用軽油タンク基礎の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-26	常設低圧代替注水系ポンプ室の地震応答計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-27	常設低圧代替注水系ポンプ室の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-28	代替淡水貯槽の地震応答計算書	Ver. 7.3.0_2

V-2-2-29	代替淡水貯槽の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-30	常設低圧代替注水系配管カルバートの地震応答解析	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-31	常設低圧代替注水系配管カルバートの耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-32	S A用海水ピットの地震応答計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-33	S A用海水ピットの耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-34	緊急用海水ポンプピットの地震応答計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-35	緊急用海水ポンプピットの耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-36	防潮堤（鋼管杭鉄筋コンクリート防潮壁）の地震応答計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-37	防潮堤（鋼管杭鉄筋コンクリート防潮壁）の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-38-1	防潮堤（鉄筋コンクリート防潮壁）の地震応答計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-38-2	防潮堤（鉄筋コンクリート防潮壁（放水路エリア））の地震応答計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-39-1	防潮堤（鉄筋コンクリート防潮壁）の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-2-39-2	防潮堤（鉄筋コンクリート防潮壁（放水路エリア））の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-10-2-2-1	防潮堤（鋼製防護壁）の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-10-2-2-2	防潮扉の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-10-2-4	構内排水路逆流防止設備の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-10-4-2	S A用海水ピット取水塔の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-10-4-3	海水引込み管の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-10-4-4-1	貯留堰の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-10-4-4-2	貯留堰取付護岸の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-10-4-5	緊急用海水取水管の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-2-11-2-16	土留鋼管矢板の耐震性についての計算書	Ver. 7.3.0_2
V-3-別添3-2-1-1	防潮堤（鋼製防護壁）の強度計算書	Ver. 7.3.0_2
V-3-別添3-2-1-2-1	防潮堤（鉄筋コンクリート防潮壁）の強度計算書	Ver. 7.3.0_2
V-3-別添3-2-1-2-2	防潮堤（鉄筋コンクリート防潮壁（放水路エリア））の強度計算書	Ver. 7.3.0_2
V-3-別添3-2-1-3	防潮堤（鋼管杭鉄筋コンクリート防潮壁）の強度計算書	Ver. 7.3.0_2
V-3-別添3-2-1-4	防潮扉の強度計算書	Ver. 7.3.0_2
V-3-別添3-2-3	構内排水路逆流防止設備の強度計算書	Ver. 7.3.0_2
V-3-別添3-2-9	貯留堰の強度計算書	Ver. 7.3.0_2

2. 解析コードの概要

項目	コード名 FLIP
使用目的	2次元有限要素法による地震応答解析（有効応力法）
開発機関	FLIPコンソーシアム
開発時期	1988年
使用したバージョン	Ver. 7.3.0_2
コードの概要	<p>FLIP (Finite element analysis of Liquefaction Program) は、1988年に運輸省港湾技術研究所（現：港湾航空技術研究所）において開発された平面ひずみ状態を対象とする有効応力解析法に基づく、2次元地震応答解析プログラムである。</p> <p>FLIPの主な特徴として、以下の項目を挙げることができる。</p> <ul style="list-style-type: none"> ①有限要素法に基づくプログラムである。 ②平面ひずみ状態を解析対象とする。 ③地盤の有効応力の変化を考慮した地震応答解析を行い、部材の断面力や変形量を計算する。 ④土の応力-ひずみモデルとしてマルチスプリング・モデルを採用している。 ⑤有効応力の変化は有効応力法により考慮する。そのために必要な過剰間隙水圧算定モデルとして井合モデルを用いている。
検証 (Verification) 及び 妥当性確認 (Validation)	<p>【検証 (Verification)】</p> <p>本解析コードの検証内容は、以下のとおりである。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・マニュアルに記載された例題の提示解と本解析コードによる解析解との比較を実施し、解析解が提示解と一致することを確認している。 ・本解析コードの運用環境について、開発機関から提示された要件を満足していることを確認している。 <p>【妥当性確認 (Validation)】</p> <p>本解析コードの妥当性確認の内容は、以下のとおりである。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・本解析コードは港湾施設の設計に用いられる「港湾施設の技術上の基準・同解説（2007）（日本港湾協会）」において、港湾施設に対して適用性が確認されている解析コードとして扱われており、今回の解析に使用することは妥当である。 ・関西電力株式会社の「高浜原子力発電所第4号機」において、防潮堤、防潮扉、屋外排水路逆流防止設備、放水ピット止水板の地震応

	<p>答解析に本コード (Ver. 7. 2. 3. 4) が使用された実績があり、杭以外の構造の施設に適用性があるということは、高浜 4 号で既に検証されている。</p> <ul style="list-style-type: none">• バージョン更新により導入された杭軸方向の「杭-地盤相互作用ばね要素」は、他プラントの既工事計画で使用されたバージョン (Ver. 7. 2. 3_4) での杭軸方向のジョイント要素と名称は異なるものの実質の構成式としては同じであるが、本工事計画において使用するバージョン (Ver. 7. 3. 0_2) と他プラントの既工事計画で使用されたバージョン (Ver. 7. 2. 3_4) との解析結果の比較を行い、解析結果が等しいことを確認した。なお、杭軸直交方向の杭-地盤相互作用バネは、Ver. 7. 3. 0_2 と Ver. 7. 2. 3_4 で名称も構成式も同じである。• 本工事計画の取水構造物で使用する RC の修正武田モデルについて、改めてその機能の検証および妥当性について確認している。• 本工事計画における構造に対し使用する地震応答解析の使用目的に対し、使用用途及び使用方法に関する適用範囲が上述の妥当性確認の範囲内であることを確認している。
--	---

3. 解析理論

3.1 支配方程式

3.1.1 運動方程式及び水流の収支バランス式

Zienkiewiczらに従い、間隙水で満たされた多孔質体の運動方程式および水流の収支バランスを表す式を次のようにおく (u-p formulation)。

$$\sigma_{ij,j} + \rho g_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3-1-1)$$

$$(k_{ij} p_{,j})_{,i} - \varepsilon_{ii} - (k_{ij} \rho_f g_j)_{,i} = -(k_{ij} \rho_f \ddot{u}_j)_{,i} + n \dot{p} / K_f \quad (3-1-2)$$

ここで、

σ_{ij}	全応力 (対称テンソル)
ρ	密度 (土と水の複合物としての密度)
g_i	重力加速度ベクトル
u_i	土骨格の変位ベクトル
k_{ij}	透水係数 (対称テンソル)
p	間隙水圧
ε_{ij}	土骨格のひずみ (対称テンソル)
ρ_f	間隙水の密度
n	間隙率
K_f	間隙水の体積弾性係数

である。

また、以下に示す関係がある。

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \delta_{ij} p \quad (\text{有効応力原理}) \quad (3-1-3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{微小ひずみテンソル}) \quad (3-1-4)$$

ここで、 σ'_{ij} は有効応力、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

なお、本定式化では、ひずみと応力に関しては、収縮・圧縮を負、伸張・引張を正とする。ただし、間隙水圧に関しては、圧縮を正とする。

3.1.2 境界条件と初期条件

式(3-1-1) (3-1-2)に対し、次に示す4種の境界条件を考える。

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \partial\Omega_u \quad (3-1-5)$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{on } \partial\Omega_\sigma \quad (3-1-6)$$

$$p = \bar{p} \quad \text{on } \partial\Omega_p \quad (3-1-7)$$

$$q = -\dot{w}_j n_j = k_{ij} (p_{,i} - \rho_f g_i + \rho_f \ddot{u}_i) n_j = \bar{q} \quad \text{on } \partial\Omega_q \quad (3-1-8)$$

ここで、

\bar{u}_i	$\partial\Omega_u$ 境界上で規定される変位
\bar{t}_i	$\partial\Omega_\sigma$ 境界上で規定される表面力
\bar{p}	$\partial\Omega_p$ 境界上で規定される間隙水圧
\bar{q}	$\partial\Omega_q$ 境界上で規定される間隙水流入量
\dot{w}_i	間隙水の骨格に対する相対速度 (断面平均)

なお、 $\partial\Omega_u$ 境界と $\partial\Omega_\sigma$ 境界を合わせたものが、対象領域 Ω の全表面 $\partial\Omega$ に等しい。また、

$\partial\Omega_u$ 境界と $\partial\Omega_\sigma$ 境界の共通部分はない。 $\partial\Omega_p$ 境界と $\partial\Omega_q$ 境界についても同様である。

一方、初期条件は領域 Ω の各点において、次のように与えられるものとする。

$$u_i = \dot{u}_i = \ddot{u}_i = 0 \quad (3-1-9)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{st} = \sigma'_{ij}{}^{st} - \delta_{ij}p^{st} \quad (3-1-10)$$

$$p = p^{st} \quad (3-1-11)$$

$$\dot{p} = 0 \quad (3-1-12)$$

特に、境界上では以下のように与えられるものとする。

$$u_i = \bar{u}_i^{st} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_u \quad (3-1-13)$$

$$t_i^{st} = \sigma_{ij}^{st}n_j = \bar{t}_i^{st} \quad \text{on } \partial\Omega_\sigma \quad (3-1-14)$$

$$p = \bar{p}^{st} \quad \text{on } \partial\Omega_p \quad (3-1-15)$$

$$q = k_{ij}(p_i^{st} - \rho_f g_i)n_j = \bar{q}^{st} \quad \text{on } \partial\Omega_q \quad (3-1-16)$$

これ以降、初期条件により示される系の状態を基準状態と呼ぶことにする。基準状態では、式(3-1-1)は、

$$\sigma_{ij,j}^{st} + \rho g_i = 0 \quad (3-1-17)$$

となる。式(3-1-17)を用い、式(3-1-1)から ρg_i の項を消去すると、次式を得る。

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{st})_{,j} = \rho \ddot{u}_i \quad (3-1-18)$$

また、基準状態では、式(3-1-2)は、

$$(k_{ij}p_{,j}^{st})_{,i} - (k_{ij}\rho_f g_j)_{,i} = 0 \quad (3-1-19)$$

となる。式(3-1-19)を用い、式(3-1-2)から重力加速度 g_i を含む項を消去すると、次式を得る。

$$(k_{ij}(p_{,j} - p_{,j}^{st}))_{,i} - \dot{\epsilon}_{ii} = -(k_{ij}\rho_f \ddot{u}_j)_{,i} + n\dot{p}/K_f \quad (3-1-20)$$

以後、式(3-1-18)及び式(3-1-20)を用いて、有限要素法に基づく定式化を行う。

3.1.3 運動方程式の離散化

式(3-1-18)に示す運動方程式は、任意の試行関数（重み関数） ϕ_i を用いて、以下のとおり書くことができる。

$$\int_{\Omega} \phi_i \left((\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{st})_{,j} - \rho \ddot{u}_i \right) dv + \int_{\partial\Omega_u} \phi_i (\bar{u}_i - u_i) ds + \int_{\partial\Omega_\sigma} \phi_i (\bar{t}_i - \sigma_{ij}n_j) ds = 0 \quad (3-1-21)$$

ここで、

$$\phi_i = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_u \quad (3-1-22)$$

とすると、式(3-1-21)は、

$$\int_{\Omega} \phi_i (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{st})_{,j} dv - \int_{\Omega} \rho \phi_i \ddot{u}_i dv + \int_{\partial\Omega} \phi_i (\bar{t}_i - \sigma_{ij}n_j) ds = 0 \quad (3-1-23)$$

となる。式(3-1-23)の左辺第1項は、Gaussの定理を用いると、

$$\int_{\Omega} \phi_i (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{st})_{,j} dv = \int_{\partial\Omega} \phi_i (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{st}) n_j ds - \int_{\Omega} \phi_{i,j} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{st}) dv \quad (3-1-24)$$

と表され、これを式(3-1-23)に代入すると次式を得る。

$$\int_{\Omega} \phi_{i,j} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{st}) dv + \int_{\Omega} \rho \phi_i \ddot{u}_i dv - \int_{\partial\Omega} \phi_i (\bar{t}_i - \bar{t}_i^{st}) ds = 0 \quad (3-1-25)$$

式(3-1-25)によれば、表面力としては、基準状態における表面力からの増力のみを考慮すればよいことがわかる。この増加分を \bar{t}_i^* で表すことにする。すなわち、

$$\bar{t}_i^* = (\bar{t}_i - \bar{t}_i^{st}) \quad (3-1-26)$$

より、式(3-1-25)は以下のように書くことができる。

$$\int_{\Omega} \phi_{i,j} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{st}) dv + \int_{\Omega} \rho \phi_i \ddot{u}_i dv - \int_{\partial\Omega} \phi_i \bar{t}_i^* ds = 0 \quad (3-1-27)$$

ここで、応力の対称性を用いると、

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\phi_{i,j} + \phi_{j,i}) (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{st}) dv + \int_{\Omega} \rho \phi_i \ddot{u}_i dv - \int_{\partial\Omega} \phi_i \bar{t}_i^* ds = 0 \quad (3-1-28)$$

となり、さらに、次式のように書くことができる。

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\boldsymbol{\phi})^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{st}) dv + \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{\phi}^T \ddot{\mathbf{u}} dv - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\phi}^T \bar{\mathbf{t}}^* ds = 0 \quad (3-1-29)$$

ここで、

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3-1-30)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx}) \quad (3-1-31)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}_{st})^T = (\sigma_{xx}^{st} \quad \sigma_{yy}^{st} \quad \sigma_{zz}^{st} \quad \sigma_{xy}^{st} \quad \sigma_{yz}^{st} \quad \sigma_{zx}^{st}) \quad (3-1-32)$$

$$\mathbf{u}^T = (u_x \quad u_y \quad u_z) \quad (3-1-33)$$

$$\boldsymbol{\phi}^T = (\phi_x \quad \phi_y \quad \phi_z) \quad (3-1-34)$$

$$(\bar{\mathbf{t}}^*)^T = (\bar{t}_x^* \quad \bar{t}_y^* \quad \bar{t}_z^*) \quad (3-1-35)$$

である。

ここで、試行関数 $\boldsymbol{\phi}$ は任意であるので、試行関数として仮想変位 $\delta\mathbf{u}$ を採用すると、式(3-1-29)より以下のような仮想仕事の原理が導かれる。

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{st}) dv + \int_{\Omega} \rho (\delta\mathbf{u})^T \ddot{\mathbf{u}} dv - \int_{\partial\Omega} (\delta\mathbf{u})^T \bar{\mathbf{t}}^* ds = 0 \quad (3-1-36)$$

さらに、以下のとおり書ける。

$$\int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{st}) dv + \int_{\Omega} \rho (\delta \mathbf{u})^T \dot{\mathbf{u}} dv - \int_{\partial \Omega} (\delta \mathbf{u})^T \bar{\mathbf{t}}^* ds = 0 \quad (3-1-37)$$

ここで、

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}) \quad (3-1-38)$$

とする。なお、 $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ ($i \neq j$)は工学ひずみである。

続いて、式(3-1-36)に示す運動方程式の離散化を行う。すなわち、変位などを補間関数 H 、節点変位ベクトル \mathbf{u} などを用いて、以下のように表す。

$$\mathbf{u} = H \underline{\mathbf{u}} \quad (3-1-39)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = H \dot{\underline{\mathbf{u}}} \quad (3-1-40)$$

ここで、2次元の場合、

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & \cdots & h_N & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & \cdots & 0 & h_N \end{bmatrix} \quad (3-1-41)$$

$$\underline{\mathbf{u}}^T = [u_x^1 \quad u_y^1 \quad u_x^2 \quad u_y^2 \quad u_x^3 \quad u_y^3 \quad \cdots \quad u_x^N \quad u_y^N] \quad (3-1-42)$$

となる。なお、 N は1要素あたりの節点数である。

さらに、ひずみベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$ は次のように表される。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = L \mathbf{u} = L H \underline{\mathbf{u}} = B \underline{\mathbf{u}} \quad (3-1-43)$$

ここで、 B は節点変位-ひずみ変換マトリクスであり、次の関係がある。

$$B = L H \quad (3-1-44)$$

これより、式(3-1-36)に示す運動方程式が、以下のように離散化される。

$$\int_{\Omega} (B \delta \underline{\mathbf{u}})^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{st}) dv + \int_{\Omega} \rho (H \delta \underline{\mathbf{u}})^T H \dot{\underline{\mathbf{u}}} dv - \int_{\partial \Omega} (H \delta \underline{\mathbf{u}})^T \bar{\mathbf{t}}^* ds \quad (3-1-45)$$

$$= (\delta \underline{\mathbf{u}})^T \int_{\Omega} B^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{st}) dv + (\delta \underline{\mathbf{u}})^T \int_{\Omega} \rho H^T H dv \dot{\underline{\mathbf{u}}} - (\delta \underline{\mathbf{u}})^T \int_{\partial \Omega} H^T \bar{\mathbf{t}}^* ds = 0$$

式(3-1-45)は、任意の仮想変位に対して成立するので、

$$\int_{\Omega} B^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{st}) dv + M \dot{\underline{\mathbf{u}}} = \mathbf{t}^* \quad (3-1-46)$$

となる。ここで、

$$M = \int_{\Omega} \rho H^T H dv \quad (3-1-47)$$

$$\mathbf{t}^* = \int_{\partial \Omega} H^T \bar{\mathbf{t}}^* ds \quad (3-1-48)$$

であり、2次元の場合、

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial h_N}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial h_N}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \dots & \frac{\partial h_N}{\partial y} & \frac{\partial h_N}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3-1-49)$$

となる。

なお、式(3-1-46)からは、 $\partial\Omega_u$ 境界上の自由度に対する式は落ちているものとする。

3.1.4 有効応力・相対変位を用いた運動方程式

式(3-1-3)に示す有効応力原理より、式(3-4-46)は有効応力を用いて以下のように書くことができる。

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}' dv + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_{st} dv + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{m}}(p - p^{st}) dv + \mathbf{t}^* \quad (3-1-50)$$

ここで、

$$\hat{\mathbf{m}}^T = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad (3-1-51)$$

$$\boldsymbol{\sigma}'^T = (\sigma'_{xx} \quad \sigma'_{yy} \quad \sigma'_{zz} \quad \sigma'_{xy} \quad \sigma'_{yz} \quad \sigma'_{zx}) \quad (3-1-52)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}'_{st})^T = (\sigma'_{xx}{}^{st} \quad \sigma'_{yy}{}^{st} \quad \sigma'_{zz}{}^{st} \quad \sigma'_{xy}{}^{st} \quad \sigma'_{yz}{}^{st} \quad \sigma'_{zx}{}^{st}) \quad (3-1-53)$$

ここで、間隙水圧を、節点における間隙水圧の値を用いて、以下のように離散化する。

$$p = \hat{\mathbf{H}} \mathbf{p} \quad (3-1-54)$$

ここで、補間関数 $\hat{\mathbf{H}}$ は以下のとおり。

$$\hat{\mathbf{H}} = [\hat{h}_1 \quad \hat{h}_2 \quad \hat{h}_3 \quad \dots \quad \hat{h}_N] \quad (3-1-55)$$

式(3-1-54)を式(3-1-50)に適用すると、運動方程式は、減衰項も考慮して次のようになる。

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}' dv + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_{st} dv + \mathbf{Q} \mathbf{p}^* + \mathbf{t}^* \quad (3-1-56)$$

ここで、 \mathbf{C} は減衰マトリクス、また、

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}_{st} \quad (3-1-57)$$

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{m}} \hat{\mathbf{H}} dv \quad (3-1-58)$$

である。

さらに、基盤に一様に入射する地震動加速度 \ddot{u}_g に対する応答を求めるために、節点変位を基盤の変位とそれに対する相対変位に分離する。すなわち、

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_r + u_g \mathbf{I} \quad (3-1-59)$$

ここで、

$$\mathbf{u}_r \quad \text{相対変位ベクトル}$$

u_g 基盤の変位 (いずれかの座標軸の方向の変位)
 I 加振方向の自由度成分に1, その他に0を割り当てたベクトル
 式(3-1-59)を式(3-1-56)に代入すると, 次式を得る。

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}' dv + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_r = -\ddot{u}_g \mathbf{M} \mathbf{I} + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_{st} dv + \mathbf{Q} \underline{\mathbf{p}}^* + \mathbf{t}^* \quad (3-1-60)$$

なお, I は平行移動を表すベクトルであるから, 次式が成り立つ。

$$\mathbf{B} \mathbf{I} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C} \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (3-1-61)$$

ひずみベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$ は, 式(3-1-43) (3-1-59) (3-1-61)より, \mathbf{u} でも \mathbf{u}_r でも同様に, 以下のよう
 にして求められる。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{u}_r \quad (3-1-62)$$

有効応力ではなく全応力で取り扱うべき要素が他にあれば, 式(3-1-60)は次のようになる。

$$\int \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}' dv + \int \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dv + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_r \quad (3-1-63)$$

$$= -\ddot{u}_g \mathbf{M} \mathbf{I} + \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_{st} dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{st} dv + \mathbf{Q} \underline{\mathbf{p}}^* + \mathbf{t}^*$$

上式では, 全領域 Ω を, 有効応力により定式化される要素の存在する領域 Ω_1 と, 全応力
 に基づく要素の存在する領域 Ω_2 に分離した。

さらに, 相対変位ベクトル \mathbf{u}_r を, 非拘束自由度 \mathbf{u}_r^f と拘束自由度 \mathbf{u}_r^c ($\partial\Omega_u$ 境界上の自由度)
 に分け, また, 行列 \mathbf{C}, \mathbf{M} もこれに応じて区分する。すなわち,

$$\mathbf{u}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_r^f \\ \mathbf{u}_r^c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}^f \quad \mathbf{C}^c], \quad \mathbf{M} = [\mathbf{M}^f \quad \mathbf{M}^c] \quad (3-1-64)$$

すると, 離散化された運動方程式(3-1-63)は, 以下のように書くことができる。

$$\int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}' dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dv + \mathbf{C}^f \dot{\mathbf{u}}_r^f + \mathbf{M}^f \ddot{\mathbf{u}}_r^f \quad (3-1-65)$$

$$= -\ddot{u}_g \mathbf{M} \mathbf{I} - \mathbf{C}^c \dot{\mathbf{u}}_r^c - \mathbf{M}^c \ddot{\mathbf{u}}_r^c + \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_{st} dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{st} dv + \mathbf{Q} \underline{\mathbf{p}}^* + \mathbf{t}^*$$

3.1.5 非排水の場合の運動方程式

間隙水が非排水条件にあると仮定した場合, 式(3-1-2)において $k_{ii} = 0$ とおくことによ
 り, 次式を得る。

$$\dot{p} = -\frac{K_f}{n} \dot{\varepsilon}_{ii} \quad (3-1-66)$$

これを時間 t に関して積分し, 式(3-1-9) (3-1-11)に示す初期条件を考慮すると,

$$p^* \equiv p - p^{st} = -\frac{K_f}{n} \varepsilon_{ii} \quad (3-1-67)$$

となる。上式を式(3-1-50)に代入すると、式(3-1-60)に代えて次式を得る。

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}' dv + \hat{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{u}}_r + \mathbf{C} \underline{\dot{\mathbf{u}}}_r + \mathbf{M} \underline{\ddot{\mathbf{u}}}_r = -\ddot{u}_g \mathbf{M} \mathbf{I} + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_{st} dv + \mathbf{t}^* \quad (3-1-68)$$

ここで、

$$\hat{\mathbf{A}} = \int_{\Omega} \frac{K_f}{n} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{m}} \hat{\mathbf{m}}^T \mathbf{B} dv \quad (3-1-69)$$

あるいは、式(3-1-65)に対応して次式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}' dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dv + \hat{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{u}}_r + \mathbf{C}^f \underline{\dot{\mathbf{u}}}_r^f + \mathbf{M}^f \underline{\ddot{\mathbf{u}}}_r^f \\ & = -\ddot{u}_g \mathbf{M} \mathbf{I} - \mathbf{C}^c \underline{\dot{\mathbf{u}}}_r^c - \mathbf{M}^c \underline{\ddot{\mathbf{u}}}_r^c + \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'_{st} dv + \int_{\Omega_2} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{st} dv + \mathbf{t}^* \end{aligned} \quad (3-1-65)$$

3.2 構成則

FLIPでは、前述のとおり、せん断応力-せん断歪関係には、主応力軸の回転が自然に考慮される、東畑・石原(1985)によるマルチスプリング・モデルを採用し、過剰間隙水圧の発生のモデルとしては、井合のモデルを採用している。

このマルチスプリング・モデルは、図3-1に示すように任意方向のせん断面に対して仮想的な単純せん断が発生するものとし、これらのせん断面に対して双曲線モデルを適用するものである。FLIPでは、双曲線モデルにおけるMasing則を修正し、履歴ループの大きさを任意に調節可能なように拡張したモデルを使用している。このモデルの特徴は以下のとおりである。

- (1) 排水条件におけるせん断応力-せん断歪の履歴ループ特性（いわゆる歪依存カーブ）は、既往の試験データとよく適合する。
- (2) 主応力の回転が自然に（つまり新たなパラメータを導入しなくても）考慮される。
- (3) 材料としての異方性が導入しやすい形となっている。

他方、過剰間隙水圧発生モデルでは、累積塑性せん断仕事に基づいて、液状化の進展に伴う過剰間隙水圧の上昇、有効応力の減少及びせん断剛性の低下等を、以下に示す手順で評価する。

- ① 地震力の作用により土の各部分ではせん断変形するが、その際の塑性せん断仕事を累積したものが液状化の進展の程度を表す指標になりうると考えられる。井合モデルでは、この累積塑性せん断仕事から、図 3-2 に示す液状化の進展の程度を表す「液状化フロントパラメータ S_0 」を求める、 S_0 が定まれば、図中の液状化フロント(Liquefaction Front)が所定の式により与えられる。なお、図 3-2 は等方圧密後に全拘束圧力一定の条件下で準静的に繰り返しせん断を行う液状化試験において得られる有効応力経路を模式的に描いたものであり、液状化フロントは液状化の進行のある局面における可能な応力経路を示す。
- ② 図 3-2 に示すように、液状化フロントとせん断応力比 $r(= q/(-\sigma_{m0}'))$ から、前述の液状化試験の条件下においては σ_m'/σ_{m0}' に一致する状態変数 S (図 3-2 の横軸の値)を求める。なお、せん断応力比 r は、進行中の地震応答解析の現時刻における最大せん断応力 q と地震応答解析開始時点の平均有効応力 σ_{m0}' から算定する。液状化試験では σ_{m0}' は等方圧密後の平均有効応力、 σ_m' は試験中の任意の時点における平均有効応力を表す。
- ③ 前述の液状化試験の条件下で考えると、 $(1 - S) \sigma_{m0}'$ は過剰間隙水圧 u に等しく、また、全体積の変化により定まる。一方、平均有効応力と体積弾性歪に関する構成則を導入すれば、平均有効応力 $\sigma_m'(= S\sigma_{m0}')$ に基づき体積弾性歪を算定することができる。したがって、過剰間隙水圧から算定される全体積歪から体積弾性歪を引くと体積塑性歪 ϵ_{mp} が得られる。この体積塑性歪は、上記液状化試験の条件下で得られるもので、2次元地震応答解析ではこの条件は成立しないが、その場合でも、この方法で見積もった体積塑性歪が

生じるものとする。

- ④ 前述の平均有効応力と体積弾性歪の関係に対して、③で求めた体積塑性歪 ϵ_{mp} を考慮すれば、全体積歪と平均有効応力との間関係を得る。2次元の地震応答解析の際には、全体積歪は地盤要素の節点変位から直ちに計算することが可能で、これにより平均有効応力 σ_m' を評価することができる。また、過剰間隙水圧比は $(1 - \sigma_m'/\sigma_{m0}')$ により算定する。なお、 σ_{m0}' は地震応答解析開始時点の平均有効応力である。
- ⑤ 上記④で求めた有効応力 σ_m' に応じてせん断強度及び初期せん断剛性を算定し直すのが普通であるが、FLIP では②で求めた状態変数 S に応じてマルチスプリング・モデルのせん断強度等を直接低減させる。これによりマルチスプリング・モデルの各スプリングが従う双曲線モデルの骨格曲線は図3-3に示すように変化する。

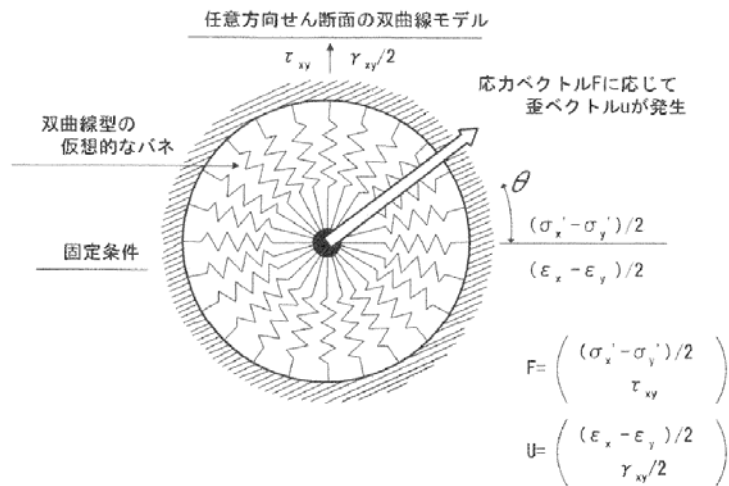


図3-1 マルチスプリング・モデル

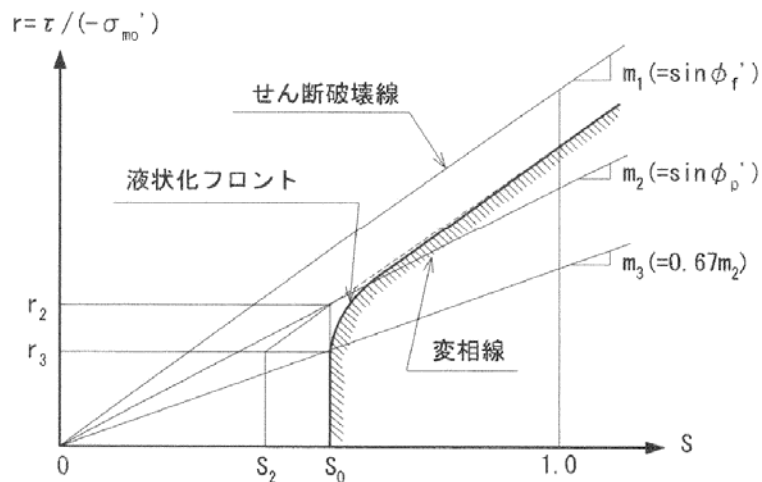


図3-2 過剰間隙水圧モデルの概念図

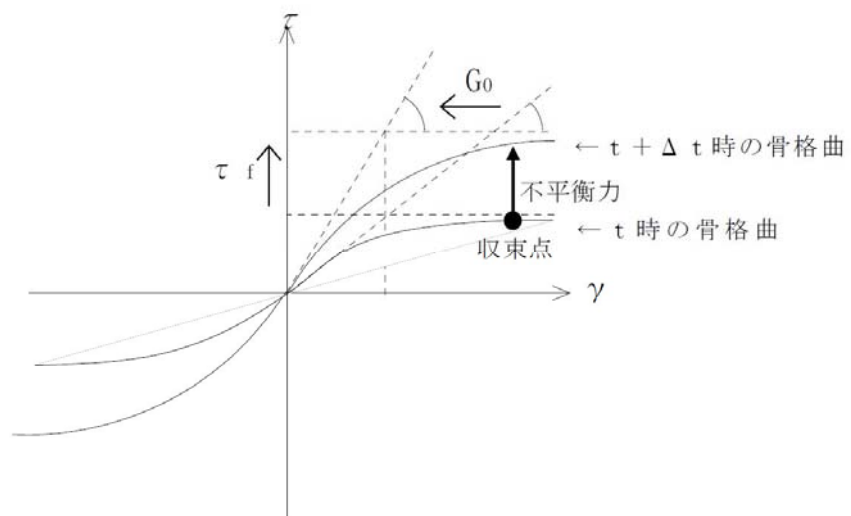


図3-3 双曲線モデルの骨格曲線の液状化による変化（模式図）

4. 解析フローチャート

解析フローチャートを図4-1に示す。

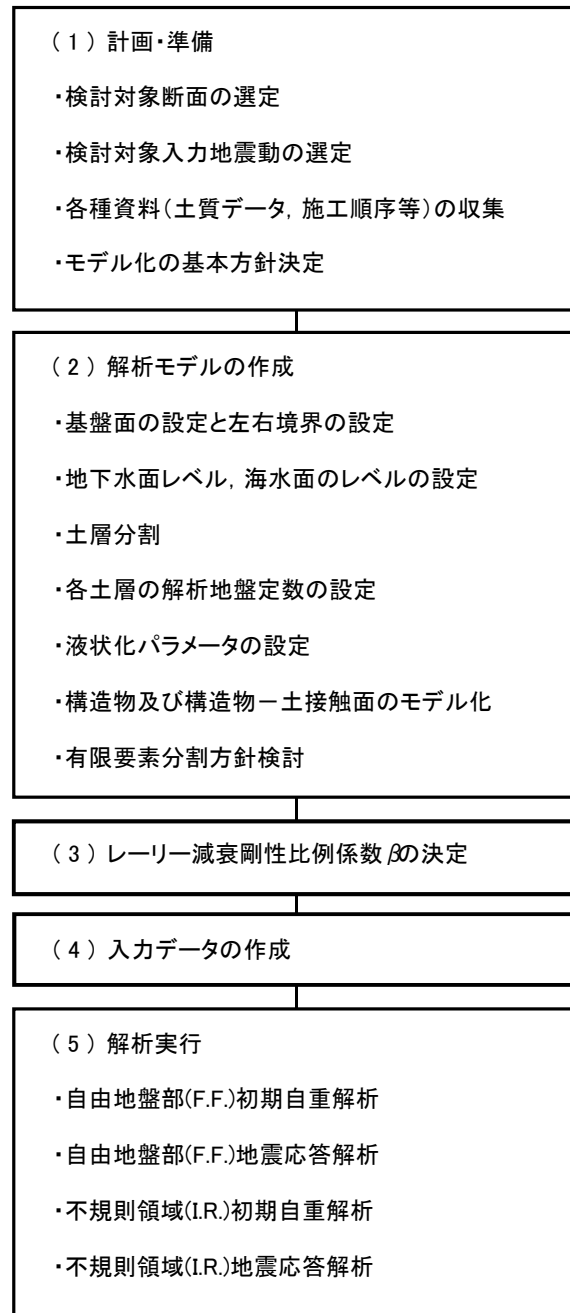


図4-1 解析フローチャート

5. FLIPの変更履歴

関西電力株式会社の「高浜原子力発電所第4号機」において、防潮堤、防潮扉、屋外排水路逆流防止設備、放水ピット止水板の地震応答解析に本コード（Ver. 7. 2. 3_4）が使用された実績がある。一方、東海第二発電所ではFLIP Ver. 7. 3. 0_2を使用する。そこで、FLIP Ver. 7. 2. 3_4からFLIP Ver. 7. 3. 0_2までの改訂履歴を表5-1～表5-3に示す。

表5-1 FLIP Ver. 7. 2. 3版からFLIP Ver. 7. 2. 3_5版への改訂内容

改訂項目	内容	実装版	東海第二での使用の有無
カクテルグラスモデル要素	①qusのデフォルト値を10000 (kPa) から0 (Sus法を使用しない)に変更した。	FLIP Ver. 7. 2. 3_3	無
非線形はり要素	①非線形はり要素 (IEL=16) に内蔵のトリリニアモデルのM～φ関係に軸力依存性を導入した。 ※現行方式では、M～φ関係の初期勾配が変わってしまうため、FLIP Ver. 7. 3. 0で改善予定とし、FLIP Ver. 7. 3. 0_2では改善済みとなった。	FLIP Ver. 7. 2. 3_4	無
バグ対応	①FLIP Ver. 7. 2. 3に存在していた、多段階解析の際のジョイント要素の不具合を修正した。	FLIP Ver. 7. 2. 3_2	
	②マルチスプリング要素のIS12 (履歴減衰算定法選択SW) を1と設定した場合の、多重せん断バネの伸びの最大値算定ルーチンをFLIP Ver. 7. 2. 2相当へ戻した。(修正が不適切だったため)	FLIP Ver. 7. 2. 3_3	
	④非線形はり要素 (IEL=16) で、IAX=1～4の場合で、Ny+とNy-が異なる場合に、両者を取り違えていたバグに対応した。	FLIP Ver. 7. 2. 3_4	
	⑤非線形はり要素 (IEL=16) にて、H形鋼の弱軸回りの全塑性モーメントの軸力依存性を考慮する場合に (IAX=4)、全塑性モーメントが正しく算定されないというバグに対応した。	FLIP Ver. 7. 2. 3_5	

ここで、カクテルグラスモデル要素は不使用であるため、検証対象外である。非線形はり要素についても軸力依存型のトリリニアモデルは不使用であるため、検証対象外となる。

表5-2 FLIP Ver. 7. 2. 3_5版からFLIP Ver. 7. 3. 0版への改訂内容

改訂項目	内容	実装版	東海第二での 使用の有無
非線形はり要素	①非線形はり要素(IEL=16)に内蔵のトリリニアモデルのM～φ関係に軸力依存性を導入したが(FLIP Ver. 7. 2. 3_4), 導入した方式では, M～φ関係の初期勾配が変わってしまうため, 現行方式を改善した。	FLIP Ver. 7. 3. 0	無
非線形ばね要素	①非線形ばね要素(IEL=17)の軸方向バネの種類として, 杭先端ばね用双曲線モデルをFLIP Ver. 7. 1. 9-6-2_5に追加したが, これをFLIP Ver. 7. 3. 0に移植した。その際, 一旦引き抜かれて, 再度押し込まれた場合に, ばね力が再び発揮される位置を, 今までは, 最初に押し込みが始まった位置としていたが, 押し込み→引抜きの最後にばねが切れた位置を指定することも可能にした。	FLIP Ver. 7. 3. 0	無
杭-地盤相互作用ばね要素	①杭-地盤相互作用ばね要素(IEL=18)に, Ver. 7. 2. 3_4に実装されているジョイント要素の杭軸方向の特性と同様の非線形特性を有する「杭-地盤相互作用ばね」という名称の非線形バネを生成する機能をFLIP Ver. 7. 1. 9-6-2_4からFLIP Ver. 7. 3. 0に移植した。	FLIP Ver. 7. 1. 9 -6-2_4	有
出力関係	①各出力データに記載の時刻表示は, 長期間の圧密解析後の地震応答解析等に対応するため, F15. 4に変更した。 ②要素タイプごとに出力する諸量を見直した。これに伴い, 要素出力成分の成分番号が変更になっているものがある。時刻歴データ(#21, #24)における流体領域の動水圧時刻歴のタイプ番号が変更になっている。また, 要素履歴データ(#23, #25)のタイプ番号が一部変更になっている。 ③固有ベクトルファイルの機番を#35から#69へ変更した。	FLIP Ver. 7. 3. 0	

ここで, 非線形はり要素は前頁で示したように不使用であるため, 検証対象外である。非線形ばね要素については, 杭先端で使用しているものの, 使用しているのはユーザー定義のモデルであり, 双曲線モデルではないため, 検証対象外である。杭-地盤相互作用ばね要素については, 他プラントの既工事計画で使用していないため, 検証が必要となる。

表5-3 FLIP Ver. 7.3.0版からFLIP Ver. 7.3.0_2版への改訂内容

改訂項目	内容	実装版	東海第二での 使用の有無
非線形はり要素	①非線形はり要素で、IHT=4(トリリニア軸力依存)の場合に、軸力変動に応じたトリリニア曲線を追跡する処理に問題があったため、これを修正した。 ②FLIP Ver. 7.3.0を作成した際に、非線形はり要素で、IHT=2(バイリニア)かつ $302 \leq IAX \leq 324$ の場合、(Mp-N)ダイアグラムの解釈が正しく行われていなかったことに対して、Ver. 7.3.0_2ではこれを修正した。	FLIP Ver. 7.3.0_2	無
杭-地盤相互作用ばね要素	①FLIP Ver. 7.3.0で、マルチスプリング要素対応の杭-地盤相互作用ばね要素の処理方法を指定する「MODESW」の入力を廃止したが、内部的に残しておいた変数MODESWと新設したパラメータ(KILLJ)の記憶域が重複していたため、MODESWがKILLJの値により変化してしまっていた。そこでMODESWの記憶域を解放して、常に、MODESW=0になるよう改めた(従来からの相互作用バネの挙動)。なお、FLIP Ver. 7.2.3版では、MODESWは0か1の値を取り得たが、どちらにしても、応答にはほとんど差が無い。	FLIP Ver. 7.3.0_2	有
入力関係	①DIST命令で分布流入量を指定した場合に、それを節点流入量に変換する処理に誤りがあったものを修正した。	FLIP Ver. 7.3.0_2	/
出力関係	①間隙水要素(非排水条件)の過剰間隙水圧を応力ファイル(#36)に出力可能にした。	FLIP Ver. 7.3.0_2	/

ここで、非線形はり要素のIHT=4、IHT=2は不使用のため、検証対象外である。杭-地盤相互作用ばね要素の変更については、前頁と同様に検証を行う。ただし、FLIPコンソーシアムによれば応答にはほとんど差が無いと示されている。

以上から、他プラントの既工事計画で使用していない検証を行うべき機能としては、杭-地盤相互作用バネの鉛直成分である杭-地盤間の摩擦を表現する非線形バネを生成する機能が対象となる。

6. 本解析で使用する要素の概要

FLIPには種々の要素が用意されている、そのうち3.2章で述べたマルチスプリング要素及び間隙水要素以外では以下の要素を用いている。

6.1 線形はり要素

線形はり要素は、構造物や杭等の構造物をモデル化する場合に用いる場合が多い。FLIPでは、2次元のアイソパラメトリック要素が用意されている。以下にその定式化について記載する。

※以下は「FLIP研究会14年間の検討成果のまとめ」より

右図に示すように2ないし3節点のまっすぐなはり要素を考え、これに対し要素座標系 $x'y'$ を導入する。節点 i の要素座標は x'_i となる。
 この要素は、1節点当り並進2自由度、回転1自由度を持ち、要素座標系では、これらは図に示したように u'_i, v'_i, θ'_i となる。

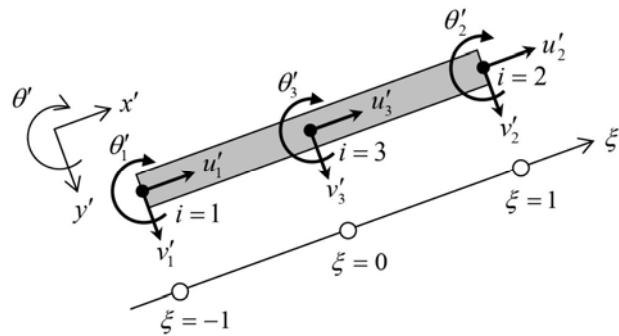


図 4-1-1 アイソパラメトリックはり

自然座標 ξ および補間関数 $h_i(\xi)$ を導入し、要素の中立軸上の任意の位置 x' 、および当該位置 x' における変位 u', v', θ' は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} x' &= \sum_i h_i(\xi) x'_i \\ u' &= \sum_i h_i(\xi) u'_i \\ v' &= \sum_i h_i(\xi) v'_i \\ \theta' &= \sum_i h_i(\xi) \theta'_i \end{aligned} \right\} \quad (4-1-1)$$

変位 u', v', θ' に関する補間式をまとめると、以下のように表される。

$$\{u'\} = H\{U'\} \quad (4-1-2)$$

ここに、

$$\{u'\}^T = (u' \quad v' \quad \theta') \quad (4-1-3)$$

$$\{U'\}^T = (u'_1 \quad v'_1 \quad \theta'_1 \quad u'_2 \quad v'_2 \quad \theta'_2 \quad u'_3 \quad v'_3 \quad \theta'_3) \quad (4-1-4)$$

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & & & h_2 & & & h_3 & & \\ & h_1 & & h_2 & & & h_3 & & \\ & & h_1 & & h_2 & & h_3 & & \\ & & & h_1 & & h_2 & & h_3 & \end{bmatrix} \quad (4-1-5)$$

なお、補間関数とその導関数は、3 節点要素の場合は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) & , & \quad \frac{\partial h_1}{\partial \xi} = \xi - \frac{1}{2} \\ h_2 &= \frac{1}{2}\xi(1+\xi) & , & \quad \frac{\partial h_2}{\partial \xi} = \xi + \frac{1}{2} \\ h_3 &= (1-\xi)(1+\xi) & , & \quad \frac{\partial h_3}{\partial \xi} = -2\xi \end{aligned} \right\} \quad (4-1-6)$$

また、2 節点要素の場合は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{2}(1-\xi) & , & \quad \frac{\partial h_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \\ h_2 &= \frac{1}{2}(1+\xi) & , & \quad \frac{\partial h_2}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4-1-7)$$

ここで、はり要素の変形は、図 4-1-2に示すように、変形前に中立軸に対して垂直な線は、変形後も直線を保つと仮定するが、その直線は変形後の中立軸に対する法線と一致する必要はない。このような方法でせん断変形を考慮するはり要素は、Timoshenko のはり理論に基づくものであるが、これを有限要素法に組み込まれるアイソパラメトリック要素に拡張するため、ここでは「アイソパラメトリックはり要素」と呼ぶ。

このような変形に対する要素のひずみベクトル $\{\varepsilon\}$ は、次のように表される。

$$\{\varepsilon\}^T = (\varepsilon' \quad \phi' \quad \gamma') \quad (4-1-8)$$

ここに、

$$\varepsilon' = \frac{\partial u'}{\partial x'} = \sum_i \frac{\partial h_i}{\partial x'} u'_i \quad (\text{軸ひずみ}) \quad (4-1-9)$$

$$\phi' = \frac{\partial \theta'}{\partial x'} = \sum_i \frac{\partial h_i}{\partial x'} \theta'_i \quad (\text{曲率}) \quad (4-1-10)$$

$$\gamma' = \theta' - \frac{\partial v'}{\partial x'} = \sum_i h_i \theta'_i - \sum_i \frac{\partial h_i}{\partial x'} v'_i \quad (\text{せん断角}) \quad 4-1-11$$

また、このひずみベクトル $\{\varepsilon\}$ は、節点変位ベクトル $\{U'\}$ と次のように関連づけることができる。

$$\{\varepsilon\} = B\{U'\} \quad (4-1-12)$$

但し、

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x'} & \frac{\partial h_2}{\partial x'} & \frac{\partial h_3}{\partial x'} \\ -\frac{\partial h_1}{\partial x'} & h_1 & -\frac{\partial h_2}{\partial x'} & h_2 & -\frac{\partial h_3}{\partial x'} & h_3 \end{bmatrix} \quad (4-1-13)$$

ここに、

$$\frac{\partial h_i}{\partial x'} = \frac{\partial h_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x'} = \frac{\partial h_i}{\partial \xi} / \left(\sum_k \frac{\partial h_k}{\partial \xi} x'_k \right) \quad (4-1-14)$$

これに対し、応力 $\{\sigma\}$ は、次式で表される。

$$\{\sigma\}^T = (\sigma' \quad M' \quad \tau') \quad (4-1-15)$$

ここに、 σ' は軸力、 M' はモーメント、 τ' はせん断力であり、力の向きは図 4-1-3 に従う。

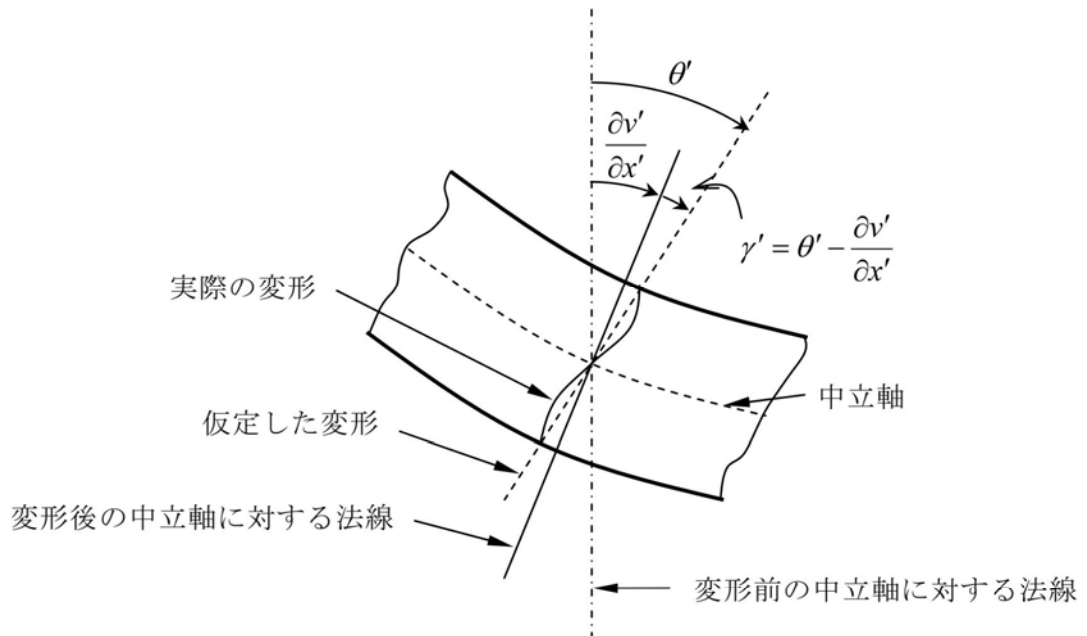


図 4-1-2 アイソパラメトリックはりの変形

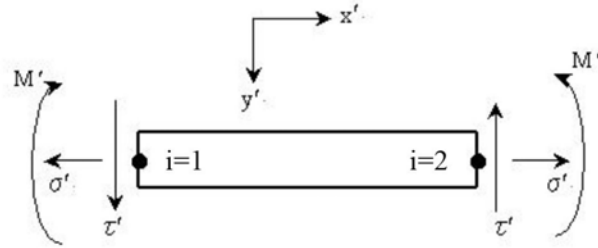


図 4-1-3 力とモーメントの向き

応力 $\{\sigma\}$ とひずみ $\{\varepsilon\}$ の関係は、次式で表される。

$$\{\sigma\} = D\{\varepsilon\} \quad (4-1-16)$$

又は、

$$\begin{Bmatrix} \sigma' \\ M' \\ \tau' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & & \\ & EI_{z'} & \\ & & GA_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon' \\ \phi' \\ \gamma' \end{Bmatrix} \quad (4-1-17)$$

ここに、

- E : ヤング率
- A : 断面積
- $I_{z'}$: (Z' 軸まわりの) 断面 2 次モーメント
- G : せん断剛性
- A_y : せん断有効面積

さて、はり要素に慣性力および節点集中力が付いている場合、ハミルトンの原理より次式を得る。

$$\int \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dx' + \iint \delta\{\tilde{u}\}^T \rho \{\ddot{\tilde{u}}\} dx' dy' - \delta\{U\}^T \{F'\} = 0 \quad (4-1-18)$$

ここで、 δ は仮想変位又はこれに応ずる仮想ひずみを表す。また、 $\{F'\}$ は節点集中力を、 $\{\tilde{u}'\}$ は要素中の任意の位置（中立軸上とは限らない）における変位を表す。すなわち、

$$\{F'\}^T = (p'_1 \quad q'_1 \quad m'_1 \quad p'_2 \quad q'_2 \quad m'_2 \quad p'_3 \quad q'_3 \quad m'_3) \quad (4-1-19)$$

$$\{\tilde{u}'\}^T = (\tilde{u}' \quad \tilde{v}') \quad (4-1-20)$$

なお、 p'_i 、 q'_i 、 m'_i は節点 i に働く x' 方向並進力、 y' 方向並進力、 θ' 方向モーメントを表す。また $\{\tilde{u}'\}$ は中立軸上の値を用いて、

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u}' \\ \tilde{v}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} \quad (4-1-21)$$

あるいは、ベクトル記号を用いて、

$$\{\tilde{u}'\} = S\{u'\} \quad (4-1-22)$$

と書ける。

式(4-1-18)は、以下のように書き換えることができる。

$$\delta\{U'\}^T (K'\{U'\} + M'\{\ddot{U}'\} - \{F'\}) = 0 \quad (4-1-23)$$

ここに、 K' は要素剛性行列で、

$$K' = \int B^T DB dx' = \int_{-1}^1 B^T DB \frac{\partial x'}{\partial \xi} d\xi \quad (4-1-24)$$

また、 M' は要素質量行列で、

$$M' = \iint \rho H^T S^T S H dx' dy' \quad (4-1-25)$$

$$= \int \rho H^T \mathbf{S} H dx' \quad (4-1-26)$$

但し、

$$\mathbf{S} = \int S^T S dy' \quad (4-1-27)$$

$$= \int \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y' \\ 0 & 1 & 0 \\ -y' & 0 & y'^2 \end{bmatrix} dy' \quad (4-1-28)$$

$$= \begin{bmatrix} A & & \\ & A & \\ & & I_{z'} \end{bmatrix} \quad (4-1-29)$$

ここで、 A は z' 方向単位巾当りの断面積、 $I_{z'}$ は z' 軸まわりの断面2次モーメントを表す。集中質量マトリクスを求める場合は、式(4-1-26)の計算において、補関関数 h_i を次のようにおく。

$$\begin{aligned}
 h_1 &= 1 \quad (-1 \leq \xi \leq -k) \\
 &= 0 \quad (\text{その他}) \\
 h_2 &= 1 \quad (k \leq \xi \leq 1) \\
 &= 0 \quad (\text{その他}) \\
 h_3 &= 1 \quad (-k \leq \xi \leq k) \\
 &= 0 \quad (\text{その他})
 \end{aligned}
 \tag{4-1-30}$$

ここに、 k は

$$k = \begin{cases} 0 & (2 \text{ 節点要素の場合}) \\ \frac{1}{2} & (3 \text{ 節点要素の場合}) \end{cases}
 \tag{4-1-31}$$

この補間関数を用いると、 $\int h_i h_j dx'$ は次のように求まる。

$$\int h_i h_j dx' = 0 \quad (i \neq j)
 \tag{4-1-32}$$

$$\int h_1^2 dx' = \int_{-1}^{-k} \frac{\partial x'}{\partial \xi} d\xi
 \tag{4-1-33}$$

$$\int h_2^2 dx' = \int_k^1 \frac{\partial x'}{\partial \xi} d\xi
 \tag{4-1-34}$$

$$\int h_3^2 dx' = \int_{-k}^k \frac{\partial x'}{\partial \xi} d\xi
 \tag{4-1-35}$$

なお、

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial x'}{\partial \xi} d\xi = \left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} \right) (x_1' + x_2' - 2x_3') - \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) (x_2' - x_1')$$

(3 節点要素の場合) (4-1-36)

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial x'}{\partial \xi} d\xi = \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) (x_2' - x_1')$$

(2 節点要素の場合) (4-1-37)

全体座標系と要素座標系の関係は右図のとおりであり、両座標系間のベクトルの変換は次式による。

$$\{U'\} = T\{U\} \quad (4-1-38)$$

$$\{F'\} = T\{F\} \quad (4-1-39)$$

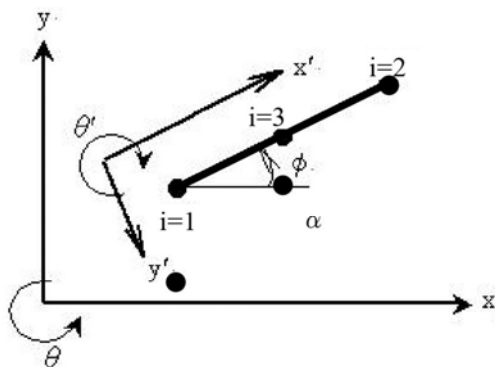


図 4-1-4 座標系

但し、 $\{U\}$ 、 $\{F\}$ は全体座標系による節点変位、節点集中力を成分とするベクトルである。また、座標変換マトリクス T は次のように表される。

$$T = \begin{bmatrix} c & s & 0 & | & 0 & 0 & | & 0 \\ s & -c & 0 & | & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & | & 0 \\ \hline & & & | & c & s & 0 & | & 0 \\ 0 & & & | & s & -c & 0 & | & 0 \\ & & & | & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ \hline & & & | & & & & | & c & s & 0 \\ 0 & & & | & & & & | & s & -c & 0 \\ & & & | & & & & | & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4-1-40)$$

$$(c \equiv \cos \alpha, s \equiv \sin \alpha)$$

さらに、全体座標系のもとの要素剛性行列 K は、

$$K = T^T K' T \quad (4-1-41)$$

となる。要素質量行列 M についても同様に、

$$M = T^T M' T \quad (4-1-42)$$

となる。

6.2 線形平面要素

線形平面要素は、地盤等をモデル化する場合に用いる事が多い。以下にその定式化について記載する。

平面ひずみ状態における線形平面要素の応力～ひずみ関係は次式で表される³⁾。

$$\{\varepsilon\} = D\{\sigma\} \quad (4-2-1)$$

但し、

$$\{\varepsilon\}^T = (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}) \quad (\text{ひずみ}) \quad (4-2-2)$$

$$\{\sigma\}^T = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}) \quad (\text{応力}) \quad (4-2-3)$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \\ & & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (4-2-4)$$

ここに、 E はヤング率、 ν はポアソン比である。

なお、要素形状はマルチスプリング要素と同じ4節点アイソパラメトリック要素を用いている。また、中間節点を持つ8節点アイソパラメトリック要素も組み込まれてはいるが、実用には4節点アイソパラメトリック要素のみで十分である。

6.3 非線形はり要素

非線形はり要素は、構造物等をモデル化する場合に用いる事が多い。以下にその定式化について記載する。

非線形はり要素は、線形はりのアイソパラメトリックはり要素を拡張し、 $M \sim \phi$ 関係を規定する曲げ剛性(式(4-1-17)における EI_z)に関して材料非線形性を考慮したものである。軸剛性およびせん断剛性に関しては線形のままである。

本非線形はり要素が扱える非線形特性には、骨格曲線としてバイリニアとトリリニアの2種類があり、履歴曲線としてはMasing則を適用している。また、バイリニアについては曲げの向きに関する第一折れ点の非対称性を考慮でき、さらに、軸力の影響による第一折れ点の変化も考慮できる。

(1) バイリニアモデル

図4-4-1にバイリニアモデルの履歴曲線を示す。図中、 EI_0 は線形弾性時の曲げ剛性、 EI_2 は第一折れ点以降の勾配、 ϕ_p は第一折れ点の曲率、 M_p は第一折れ点の曲げモーメントで、これらのうち EI_0 、 EI_2 、 M_p はバイリニアモデルを規定するのに必要な最小限のパラメータである。 ϕ_p および M_p は、鋼材を対象とした場合の全塑性時に相当するが、モデル化に応じて降伏時に対応させてもよい。また、RC部材を対象にする場合は、モデル化に応じて第一折れ点をひび割れ時、降伏時、または終局時に対応させる。

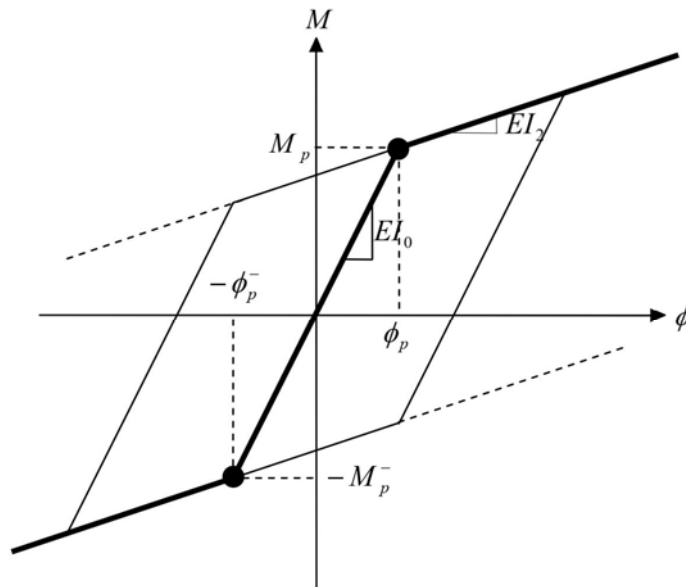


図 4-4-1 バイリニアモデル

ϕ_p^- および M_p^- は、曲げの方向に関して非対称な場合に必要となるパラメータであるが、入力を要求されるパラメータは M_p^- のみで、 ϕ_p^- は M_p^- と EI_0 からプログラム内部で設定される。

バイリニアモデルにおいては、発生軸力に応じて第一折れ点の曲げモーメント（鋼材の場合の全塑性モーメントに対応）の影響を考慮できる。長方形断面および鋼管断面の場合は、次式に示す軸力による全塑性曲げモーメントの低減式⁴⁾がプログラム内部に組み込まれている。

$$M_{pc} = M_p \left\{ 1 - \left(\frac{N}{N_y} \right)^2 \right\} \quad (\text{長方形断面}) \quad (4-4-1)$$

$$M_{pc} = M_p \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{N}{N_y} \right) \quad (\text{鋼管断面}) \quad (4-4-2)$$

ここに、 M_{pc} は低減後の全塑性曲げモーメント、 N_y は降伏軸方向力である。

また、図 4-4-2に示すようなM-N関係を定義することにより、発生軸力に応じた全塑性曲げモーメントの低減が可能である。

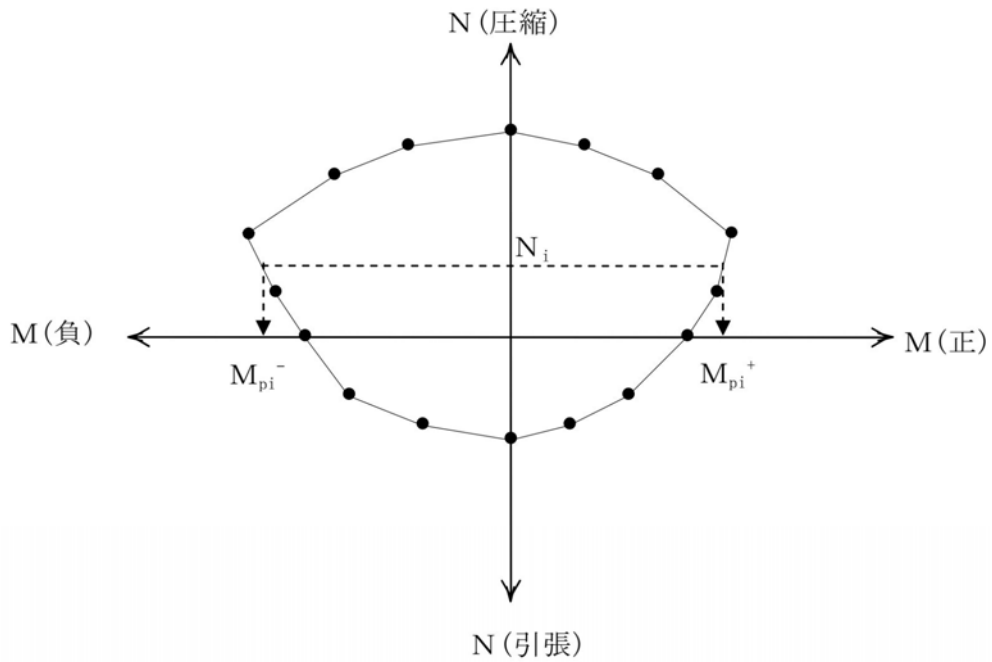


図 4-4-2 M-N関係の定義

(2) トリリニアモデル

図 4-4-3 にトリリニアモデルの履歴曲線を示す。図中、 EI_0 は線形弾性時の曲げ剛性、 EI_1 は第一折れ点から第二折れ点間の勾配、 EI_2 は第二折れ点以降の勾配、 M_y は第一折れ点の曲げモーメント、 M_p は第二折れ点の曲げモーメントで、これらはトリリニアモデルを規定するのに必要となるパラメータである。 ϕ_y および ϕ_p は、与えられたパラメータ (EI_0 、 EI_1 、 M_y 、 M_p) からプログラム内部で設定される。 M_y および M_p は、それぞれ鋼材を対象とした場合の降伏時および全塑性時に相当する。また、RC 部材を対象にする場合は、モデル化に応じて第一折れ点をひび割れ時に、第二折れ点を降伏時に対応させるか、または、第一折れ点を降伏時に、第二折れ点を終局時に対応させる。

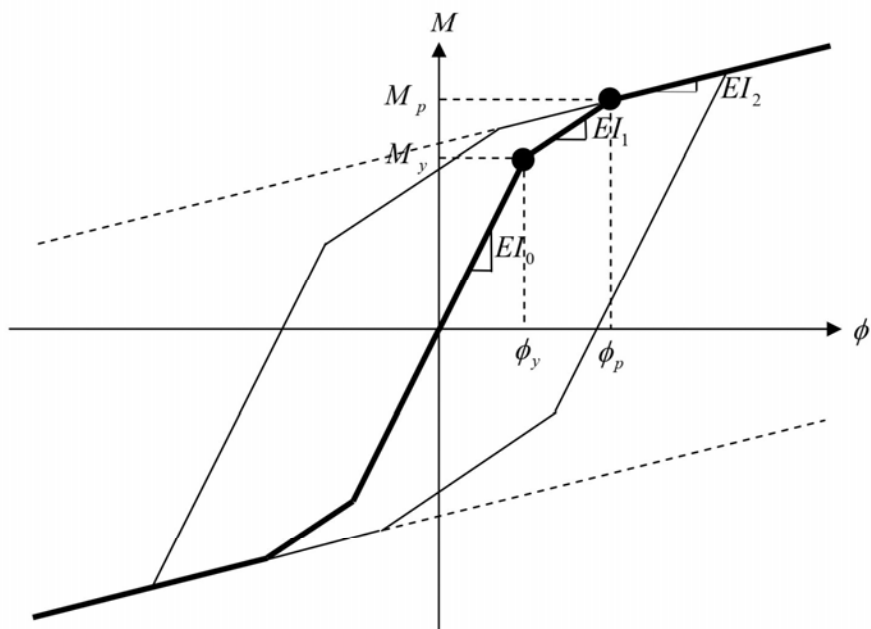


図 4-4-3 トリリニアモデル

6.4 非線形ばね要素

非線形ばね要素は、地盤-構造物間の接合等をモデル化する場合に用いる場合が多い。以下にその定式化について記載する。

(1) 非線形ばねの定式化

非線形ばね要素は、図 4-5-1に示すように、任意方向の2節点間を軸方向ばね、せん断方向ばね、および回転ばねで結んだものであり、各々のばねに対して個別に各種非線形性を考慮できる。なお、線形ばね要素では直接全体座標系のばねを定義していたが、非線形ばねではそのままでは入力が煩雑になってしまうため、任意方向のばねを考慮できるように局所座標系 ns を導入している。

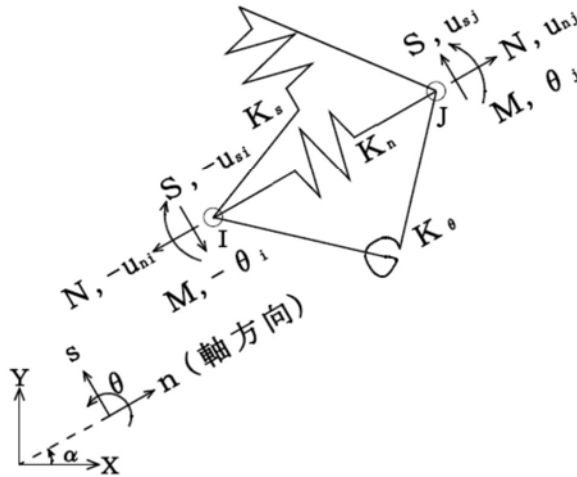


図 4-5-1 非線形ばね

局所座標系 ns における力～変位関係は次式で表される。

$$\{f'\} = K'' \{du\} \quad (4-5-1)$$

但し、

$$\{f'\}^T = (N \quad S \quad M) \quad (4-5-2)$$

$$\{du\}^T = (u_n^j - u_n^i \quad u_s^j - u_s^i \quad \theta^j - \theta^i) \quad (4-5-3)$$

$$K'' = \begin{bmatrix} K_n & & \\ & K_s & \\ & & K_\theta \end{bmatrix} \quad (4-5-4)$$

ここに、 K_n は軸方向ばね定数、 K_s はせん断方向ばね定数、 K_θ は回転ばね定数である。

ここで、非線形要素に関する変位ベクトルを以下のように並び替えれば、

$$\{u\}^T = (u_n^i \quad u_s^i \quad \theta^i \quad u_n^j \quad u_s^j \quad \theta^j) \quad (4-5-5)$$

力～変位関係は次のように表される。

$$\{f\} = K'\{u\} \quad (4-5-6)$$

但し、

$$\{f\}^T = (-N \quad -S \quad -M \quad N \quad S \quad M) \quad (4-5-7)$$

$$K' = \begin{bmatrix} K_n & & & -K_n & & \\ & K_s & & & -K_s & \\ & & K_\theta & & & -K_\theta \\ -K_n & & & K_n & & \\ & -K_s & & & K_s & \\ & & -K_\theta & & & K_\theta \end{bmatrix} \quad (4-5-8)$$

また、局所座標系 ns から全体座標系への座標変換マトリクスは次式で表される。

$$T = \begin{bmatrix} c & -s & & & & \\ s & c & & & & 0 \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & c & -s & \\ 0 & & & s & c & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (4-5-9)$$

$$(c \equiv \cos \alpha, \quad s \equiv \sin \alpha)$$

したがって、全体座標系における要素剛性行列 K は、以下のようになる。

$$K = T^T K' T \quad (4-5-10)$$

(2) 非線形特性

軸方向ばね、せん断方向ばね、回転方向ばねのそれぞれについて、独立して以下の3種類の非線形特性を考慮できる。

- ① 非線形弾性
- ② バイリニアモデル
- ③ トリリニアモデル

(a) 非線形弾性

非線形弾性は、図 4-5-2に示すような利用者が定義した骨格曲線の上を動くのみで履歴曲線は描かない。なお、利用者が定義するパラメータは、骨格曲線の折れ点 (du_i 、 P_i) であり、曲線の勾配 (K_i) はプログラム内部で計算される。また、一番外側の入力点 (図 4-5-2を例にとれば、点 (du_1 、 P_1) と点 (du_6 、 P_6)) より外側の骨格曲線は外挿される。

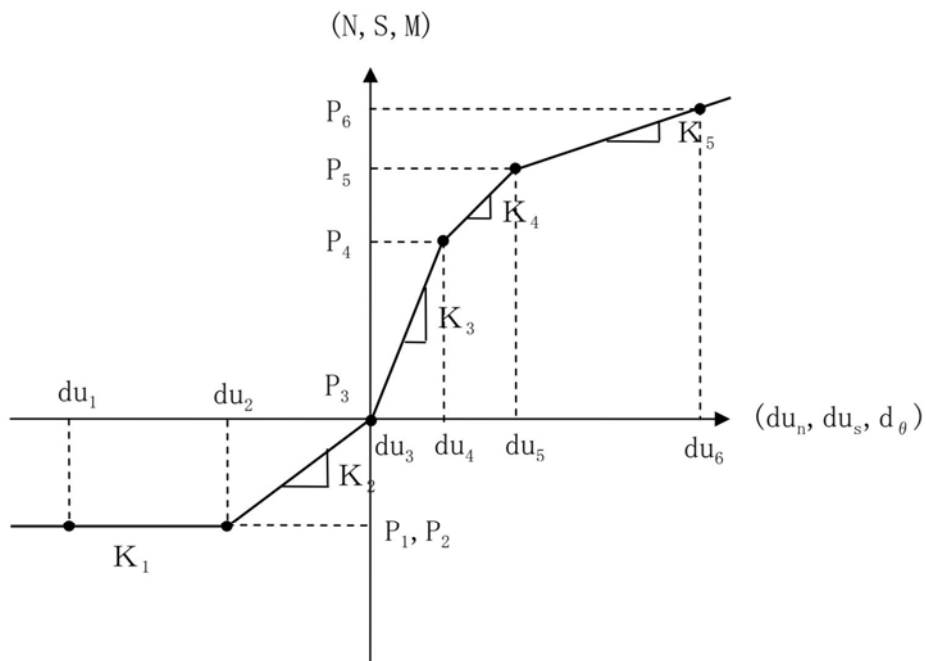


図 4-5-2 非線形弾性

(b)バイリニアモデル

バイリニアモデルの骨格曲線は、図 4-5-3に示すように、 K_0 、 K_1 、 P_1 の3つのパラメータで規定され、履歴曲線は Masing 則に従う。

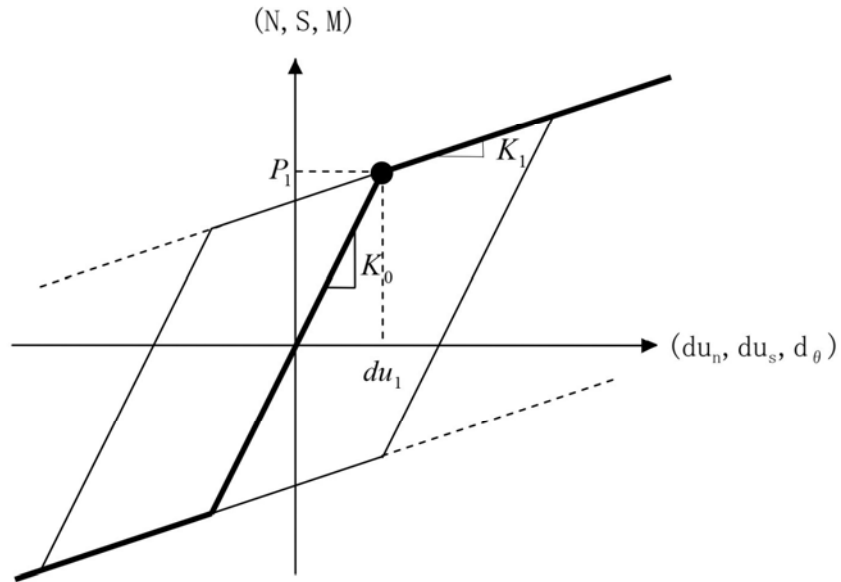


図 4-5-3 バイリニアモデル

(c)トリリニアモデル

トリリニアモデルの骨格曲線は、図 4-5-4に示すように、 K_0 、 K_1 、 K_2 、 P_1 、 P_2 の5つのパラメータで規定され、履歴曲線は Masing 則に従う。

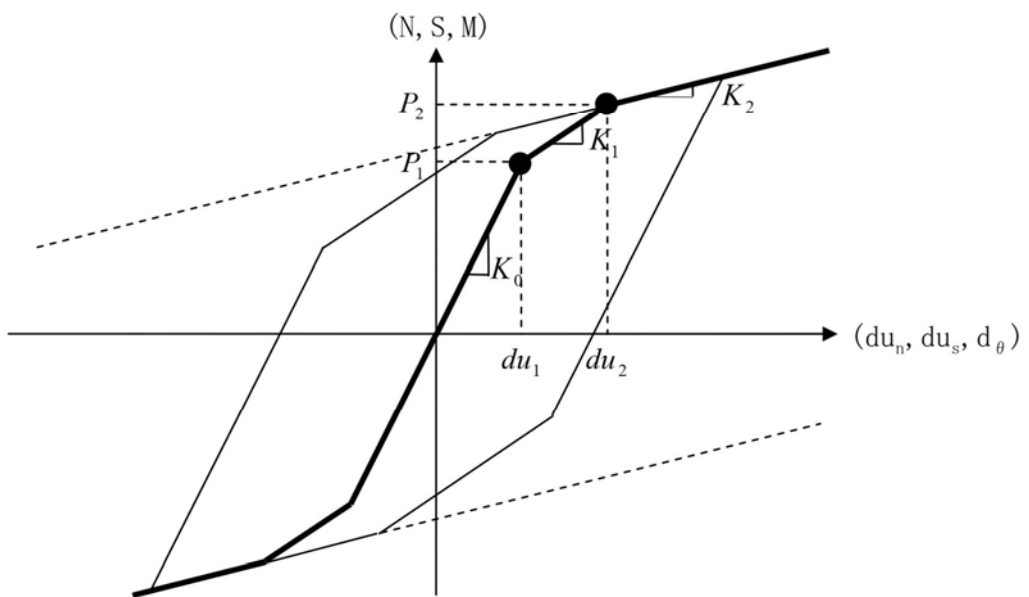


図 4-5-4 トリリニアモデル

6.5 ジョイント要素

ジョイント要素は、地盤-構造物間の接合等をモデル化する事が多い。以下にその定式化について記載する。

引張に対しては分離し、せん断に対してはすべり、圧縮に対しては力を伝達するような不連続面を表すため、右図に示すような4節点2次元ジョイント要素を考える。

この要素については、以下に示すように2通りの定式化が行なわれている。

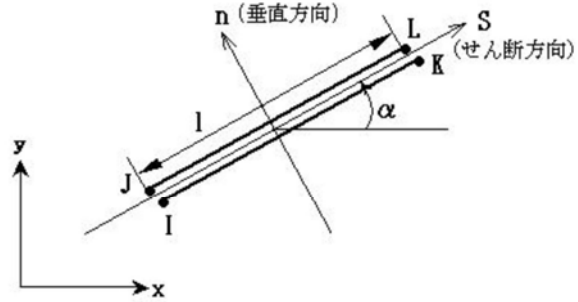


図 4-6-1 4節点ジョイント要素

(1) Goodman による定式化⁵⁾

要素座標系 s 方向の節点変位を $\mu_I, \mu_J, \mu_K, \mu_L$ で表し、又、n 方向のそれを v_I, v_J, v_K, v_L で表す。節点変位ベクトル $\{U'\}$ を次のように定義する。

$$\{U'\}^T = (\mu_I, v_I, \mu_J, v_J, \mu_K, v_K, \mu_L, v_L) \quad (4-6-1)$$

さらに、ひずみ $\{\varepsilon\}$ を次のように定義する。

$$\{\varepsilon\}^T = (\gamma, \varepsilon, \omega) \quad (4-6-2)$$

但し、

$$\gamma = \frac{\mu_J + \mu_L}{2} - \frac{\mu_I + \mu_K}{2} \quad (\text{せん断方向平均変位差}) \quad (4-6-3)$$

$$\varepsilon = \frac{v_J + v_L}{2} - \frac{v_I + v_K}{2} \quad (\text{垂直方向平均変位差}) \quad (4-6-4)$$

$$\omega = \frac{v_L - v_K}{l} - \frac{v_J - v_I}{l} \quad (\text{開き角}) \quad (4-6-5)$$

ひずみと節点変位ベクトルとの間の関係は、次式で与えられる。

$$\{\varepsilon\} = L_0 \{U'\} \quad (4-6-6)$$

但し、

$$L_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \quad (4-6-7)$$

次に、ジョイント要素の応力を次のように定義する。

$$\{\sigma\}^T = (\tau_{ns}, \sigma_n, M_o) \quad (4-6-8)$$

但し、

$$\tau_{ns} = \frac{1}{\ell}(F_{sJ} + F_{sL}) \quad (\text{せん断応力}) \quad (4-6-9)$$

$$\sigma_n = \frac{1}{\ell}(F_{nJ} + F_{nL}) \quad (\text{垂直応力}) \quad (4-6-10)$$

$$M_o = \frac{l}{2}(F_{nL} + F_{nJ}) \quad (\text{モーメント}) \quad (4-6-11)$$

なお、Fは節点力を表し、第1の添字が方向を、第2の添字が節点を表す。なお、節点ベクトル $\{F'\}$ を次により定義する。

$$\{F'\}^T = (F_{sL}, F_{nL}, F_{sJ}, F_{sI}, F_{nJ}, F_{sK}, F_{nK}, F_{sI}, F_{nL}) \quad (4-6-12)$$

応力と節点ベクトルとの間には、次の関係がある。

$$\{F'\} = B\{\sigma\} \quad (4-6-13)$$

但し、

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l}{2} & \frac{1}{\ell} \\ \frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2} & -\frac{1}{\ell} \\ -\frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l}{2} & -\frac{1}{\ell} \\ -\frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2} & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} \quad (4-6-14)$$

又、上式の導出に際しては、 $F_{sI} = -F_{sJ}$ などの関係を用いた。

応力-ひずみ関係は、次図に示すように与える。

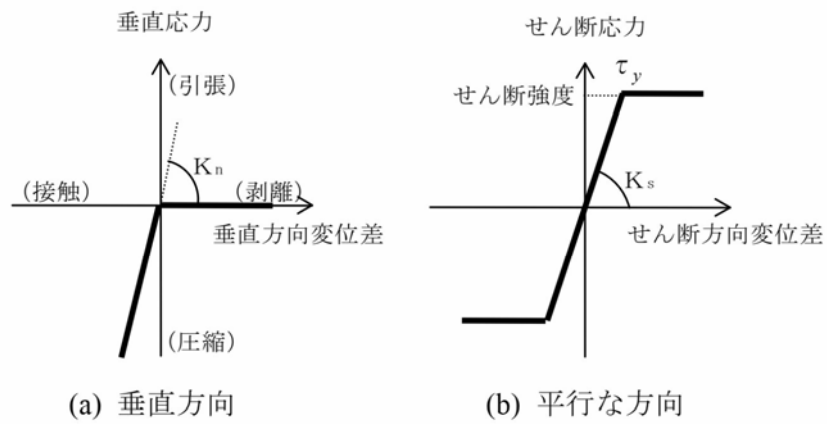


図 4-6-2 応力-ひずみ関係

なお、降伏せん断応力 τ_y は、次式で与えられるものとする。

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= C_J - \sigma_n \tan \phi_J & (\varepsilon \leq 0 \text{の時}) \\ &= 0 & (\varepsilon > 0 \text{の時}) \end{aligned} \right\} \quad (4-6-15)$$

ここに、 C_J はジョイントの粘着力、 ϕ_J はジョイントの摩擦角を表す。さらに、モーメント M_o と開き角 ω との関係は、

$$\left. \begin{aligned} M_o &= \frac{1}{4} \ell^3 K_n \omega & (\varepsilon \leq 0 \text{の時}) \\ &= 0 & (\varepsilon > 0 \text{の時}) \end{aligned} \right\} \quad (4-6-16)$$

で与えられるものとする。

以上の関係を用いると、節点変位ベクトルに対する節点力ベクトルを、次に示す手順に従って求めることができる。

$$\{U\} \xrightarrow{\text{座標変換}} \{U'\} \xrightarrow{\text{式(4-6-6)}} \{\varepsilon\} \xrightarrow{\text{図 4-6-2}} \{\sigma\} \xrightarrow{\text{式(4-6-13)}} \{F'\} \xrightarrow{\text{座標変換}} \{F\}$$

式(4-6-8)

但し、 $\{U\}$ および $\{F\}$ は、全体座標系による成分から成るベクトルを表す。

次に、接線剛性行列 K' を求める。 K' は、

$$K' = \frac{\partial \{F'\}}{\partial \{U'\}} = BCL_o \quad (4-6-17)$$

と表すことができる。但し、 C は次式で与えられる。

$$C = \frac{\partial \{\sigma\}}{\partial \{\varepsilon\}} = \begin{bmatrix} k_s & 0 & 0 \\ 0 & k_n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \ell^3 k_n \end{bmatrix} \quad (4-6-18)$$

又、 k_s 、 k_n は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} k_s &= \frac{\partial \tau_{ns}}{\partial \gamma} = K_s && (|\tau_{ns}| < \tau_y \text{の時}) \\ &= 0 && (|\tau_{ns}| = \tau_y \text{の時}) \end{aligned} \right\} \quad (4-6-19)$$

$$\left. \begin{aligned} k_n &= \frac{d \sigma_n}{d \varepsilon} = K_n && (\varepsilon \leq 0 \text{の時}) \\ &= 0 && (\varepsilon > 0 \text{の時}) \end{aligned} \right\} \quad (4-6-20)$$

接線剛性行列は、式(4-6-17)の行列の乗算を行なうと、次のように求められる。

$$K' = \frac{1}{4} \ell \left[\begin{array}{cccc|cccc} k_s & 0 & -k_s & 0 & k_s & 0 & -k_s & 0 \\ 0 & 2k_n & 0 & -2k_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_s & 0 & k_s & 0 & -k_s & 0 & k_s & 0 \\ 0 & -2k_n & 0 & 2k_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline k_s & 0 & -k_s & 0 & k_s & 0 & -k_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k_n & 0 & -2k_n \\ -k_s & 0 & k_s & 0 & -k_s & 0 & k_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_n & 0 & 2k_n \end{array} \right] \quad (4-6-21)$$

節点変位ベクトルおよび節点力ベクトルは、全体座標系と要素座標系との間で、それぞれ次のような変換を受ける。

$$\{U'\} = T\{U\} \quad (4-6-22)$$

$$\{F'\} = T\{F\} \quad (4-6-23)$$

但し、

$$T = \begin{bmatrix} c & s & & & & & & & \\ -s & c & & & & & & & \\ & & c & s & & & & & \\ & & -s & c & & & & & \\ & & & & c & s & & & \\ & & & & -s & c & & & \\ & & & & & & c & s & \\ & & & & & & -s & c & \end{bmatrix} \quad (4-6-24)$$

$c \equiv \cos \alpha \quad , \quad s \equiv \sin \alpha$

この変換行列を用いると、全体座標系における接線剛性行列 K は、

$$K = T^T K' T \quad (4-6-25)$$

として求まる。

(2) 非線形ばねを用いた定式化

右図に示すように、向かい合う2節点を直交する2本の非線形ばねで結び、それが2組あるようなモデルを考える。図のI、J節点を結ぶばねは、要素の左半分を、又、K、L節点間を結ぶばねは右半分を代表するものとし、I、J節点の自由度とK、L節点の自由度の間には連成を考慮しない。

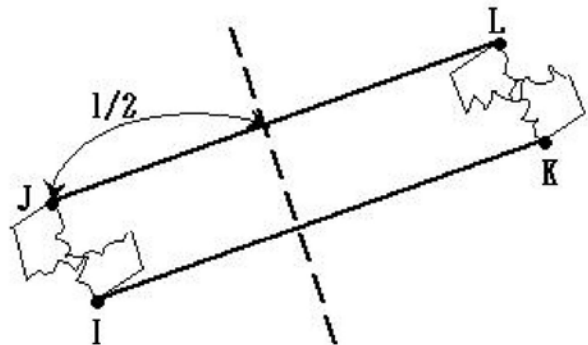


図 4-6-3 非線形ばねを用いたジョイント要素

以下では、図のI、J節点側のみを考えることにするが、K、L節点の方もまったく同様に取り扱うことが出来る。

式(4-6-1)および式(4-6-2)に対応して、節点変位ベクトル $\{U'\}$ およびひずみ $\{\varepsilon\}$ を次のように定義する。

$$\{U'\}^T = (\mu_I, v_I, \mu_J, v_J) \quad (4-6-26)$$

$$\{\varepsilon\}^T = (\gamma, \varepsilon) \quad (4-6-27)$$

但し、

$$\gamma = \mu_J - \mu_I \quad (\text{せん断方向変位差}) \quad (4-6-28)$$

$$\varepsilon = v_J - v_I \quad (\text{垂直方向変位差}) \quad (4-6-29)$$

又、 $\{\varepsilon\}$ と $\{U'\}$ との関係は、次式で与えられる。

$$\{\varepsilon\} = L_0 \{U'\} \quad (4-6-30)$$

さらに、節点力ベクトル $\{F'\}$ と応力ベクトル $\{\sigma\}$ を、

$$\{F'\}^T = (F_{sI}, F_{nI}, F_{sJ}, F_{nJ}) \quad (4-6-31)$$

$$\{\sigma\} = (\tau_{ns}, \sigma_n) \quad (4-6-32)$$

と定義すると、両者の間には、式(4-6-13)と同様、次の関係がある。

$$\{F'\} = B\{\sigma\} \quad (4-6-33)$$

但し、

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{\ell}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\ell}{2} \\ \frac{\ell}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\ell}{2} \end{bmatrix} \quad (4-6-34)$$

また、ひずみ-応力関係は、図 4-6-2に示すように与える。

以上の関係を用いると、節点変位ベクトルに対する節点力ベクトルを求めることができる。

次に、接線剛性行列 K' は、式(4-6-17)と同様、

$$K' = \frac{\partial \{F'\}}{\partial \{U'\}} = BCL_0 \quad (4-6-35)$$

と表すことができる。但し、ここでは C は次のようになる。

$$C = \frac{\partial \{\sigma\}}{\partial \{\varepsilon\}} = \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (4-6-36)$$

式 4-6-35 の乗算を行なうと、接線剛性行列は次式で表される。

$$K' = \frac{\ell}{2} \begin{bmatrix} k_s & 0 & -k_s & 0 \\ 0 & k_n & 0 & -k_n \\ -k_s & 0 & k_s & 0 \\ 0 & -k_n & 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (4-6-37)$$

あるいは、全体座標系では次のようになる。

$$K = \frac{\ell}{2} \begin{bmatrix} c^2 k_s + s^2 k_n & csk_s - csk_n & -c^2 k_s - s^2 k_n & -csk_s + csk_n \\ & s^2 k_s + c^2 k_n & -csk_s + csk_n & -s^2 k_s - c^2 k_n \\ \text{Symmetric} & & c^2 k_s + s^2 k_n & csk_s - csk_n \\ & & & s^2 k_s + c^2 k_n \end{bmatrix} \quad (4-6-38)$$

($c \equiv \cos \alpha$, $s \equiv \sin \alpha$)

6.6 流体要素と流体-構造連成面要素

流体要素及び流体-構造連成面要素は、海水や海水-護岸構造物間の接続をモデル化する場合に用いる事が多い。以下にその定式化について記載する。

(1) 動水圧に関する定式化⁶⁾

流体領域は、非圧縮の波動方程式に支配されるものとし、有限要素法による定式化を行なって付加質量マトリックスを求める。この付加質量マトリックスは、運動方程式における質量マトリックスに含まれるものとする。また、荷重項にも、付加質量マトリックスの寄与が含まれるものとする。

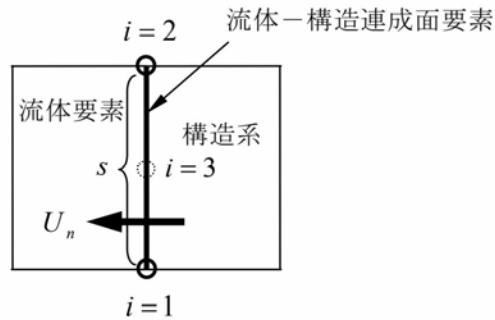


図 4-7-1 流体要素と流体構造連成面要素

圧縮性流体が微小振幅の運動するとき、発生する圧力分布 p の支配方程式は、2次元においては次式で表される。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (4-7-1)$$

ここに、 \bar{c} は音波の速度を表し、粘性による減衰項は省略してある。また、境界が固体で運動している場合は次式で与えられる。

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (U_n) \quad (4-7-2)$$

ここに、 ρ は流体の密度、 U_n は変位の法線方向成分を表す。

この連成問題において、非圧縮性流体 ($\bar{c} = \infty$) を仮定し、流体領域を有限要素に分割すれば、次式に示す離散化方程式が導かれる。

$$G\{p\} + S\{\ddot{u}\} = 0 \quad (4-7-3)$$

ここに、 G は動水圧に関するマトリックス、 S は流体と構造物の境界面に関するマトリックスで次式で表される。

$$S = \int_s H^T \rho \bar{H} ds \quad (4-7-4)$$

ここに、 H は圧力分布を定義する形状関数で、 \bar{H} は構造系の変位ベクトルと境界面の法線方向の変位を関係づける形状関数(次式参照)、 s は流体と構造物の境界面を表す。

$$\{U_n\} = \bar{H}\{u\} \quad (4-7-5)$$

式 4-7-3 より、境界面における圧力 $\{p\}$ (動水圧) は直接解け、次式の通りになる。

$$\{p\} = -G^{-1}S\{\ddot{u}\} \quad (4-7-6)$$

一方、構造系における有限要素の離散化方程式は次式のように表すことができる。

$$M\{\ddot{u}\} + C\{\dot{u}\} + K\{u\} + \{\bar{f}_s\} + \{r\} = 0 \quad (4-7-7)$$

ここで、外力項は構造系において独立に指定される外力項 $\{r\}$ と境界流体圧力（動水圧）による項 $\{\bar{f}_s\}$ とに分解してある。仮想仕事の原理から、後者は次式で与えられる。

$$\{\bar{f}_s\} = \int_s \bar{H}^T p ds = \frac{1}{\rho} S^T \{p\} \quad (4-7-8)$$

この式に式(4-7-6)を代入すると、次式が得られる。

$$\{\bar{f}_s\} = -\frac{1}{\rho} S^T G^{-1} S \{\ddot{u}\} \quad (4-7-9)$$

したがって、次式に示す質量マトリクスが付加質量マトリクスとして運動方程式に含まれる。

$$-\frac{1}{\rho} S^T G^{-1} S \quad (4-7-10)$$

なお、運動方程式が解かれれば、動水圧は式(4-7-6)より求められる。

6.7 粘性要素（側方地盤要素・底面地盤要素）

粘性要素（側方地盤要素・底面地盤要素）は、地盤の半無限性を模擬するための要素である。以下にその定式化について記載する。

（１）側方地盤要素（側方粘性境界要素）

構造系の側面に側方地盤要素を定義すると、側方粘性境界とみなされ、当該境界に次の表面力が付く。

$$\bar{T}_x^* = -\rho V_p (\dot{U}_x^s - \dot{U}_x^f) \quad (4-8-1)$$

$$\bar{T}_y^* = -\rho V_s (\dot{U}_y^s - \dot{U}_y^f) \quad (4-8-2)$$

但し、 ρ 、 V_s 、 V_p は側方無限地盤の密度、s波速度、p波速度を表す。又 \dot{U}_x^s 、 \dot{U}_y^s は構造系側面の（相対）速度、 \dot{U}_x^f 、 \dot{U}_y^f はfree fieldの（相対）速度。

これらの表面力は離散化された運動方程式において次式に示す減衰項と荷重項に付加される。

$$C_s \left(\{\dot{U}\}_r - \{\dot{U}\}_r^f \right) \quad (4-8-3)$$

但し、

$$C_s = \int_{\text{側面}} H^T \begin{bmatrix} \rho V_p & \\ & \rho V_s \end{bmatrix} H d\Gamma \quad (4-8-4)$$

$\{\dot{U}\}_r^f$ はfree fieldの相対節点速度を表す。また、 $C_s \{\dot{U}\}_r$ が減衰項に、 $+C_s \{\dot{U}\}_r^f$ が荷重項になる。

（２）下方地盤要素（底面粘性境界要素）

構造系の側面に下方地盤要素を定義すると、底面粘性境界とみなされ、当該境界に次の表面力が付く。

$$\bar{T}_x^* = -\tau_{yx} = -\rho V_s \dot{U}_x^b \quad (4-8-5)$$

$$\bar{T}_y^* = -\sigma_y = -\rho V_p \dot{U}_y^b \quad (4-8-6)$$

但し、 ρ 、 V_s 、 V_p は下方無限地盤の密度、s波速度、p波速度を表す。又、 \dot{U}_x^b 、 \dot{U}_y^b は構造系底面の基盤に対する相対速度である。

下方粘性境界の表面力は、離散化された運動方程式において次式に示す減衰項に付加される。

$$C_b \{\dot{U}\}_r \quad (4-8-7)$$

但し、

$$C_b = \int_{\text{底面}} H^T \begin{bmatrix} \rho V_s \\ \rho V_p \end{bmatrix} H d\Gamma \quad (4-8-8)$$

6.8 節点集中質量要素

節点集中質量要素は、載荷される物体の質量を慣性力として模擬するための要素である。以下にその定式化について記載する。

節点集中質量要素は、図 4-9-1 に示すように、一つの節点 (i) 上に並進 2 成分と回転成分の計 3 成分の質量を定義し、節点にかかる慣性力を考慮する。

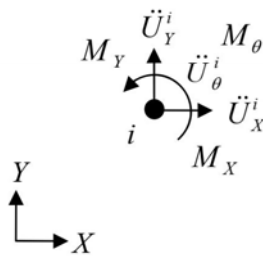


図 4-9-1 節点集中質量要素

節点集中質量要素を定義した節点 i 上に生じる慣性力は次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} F_{MX}^i \\ F_{MY}^i \\ F_{M\theta}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_X & & \\ & M_Y & \\ & & M_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_X^i \\ \ddot{U}_Y^i \\ \ddot{U}_\theta^i \end{Bmatrix} \quad (4-9-1)$$

ここに、 M_X は水平方向で考慮する質量、 M_Y は鉛直方向で考慮する質量、 M_θ は回転方向で考慮する質量である。

したがって、次式に示す質量マトリクス M_{add} が離散化された運動方程式の慣性項に該当する自由度に対して付加される。

$$M_{add} = \begin{bmatrix} M_X & & \\ & M_Y & \\ & & M_\theta \end{bmatrix} \quad (4-9-2)$$

6.9 修正武田モデル

修正武田モデルは、鉄筋コンクリート部材等を対象とする非線形はり要素の構成則である。特に鉄筋コンクリート部材に用いる場合には、鉄筋の配置が非対称になる場合もあることから、曲げの方向により非対称となる $M \sim \phi$ 関係を設定できる修正武田モデルを適用している。なお、軸力 \sim 軸ひずみ関係やせん断力 \sim せん断角関係は線形である。

以下に修正武田モデルの挙動を示す履歴のルールを記載する。

- ① 骨格曲線 (図 6-1 点線) は tri-linear である。
- ② これまでの最大変形点における δ を δ_{max} (正側), δ_{min} (負側) とする。 δ が線形領域 ($-\delta_c^- < \delta_{min}$ かつ $\delta_c^+ > \delta_{max}$) から初めて δ_c^+ を超えた, もしくは $-\delta_c^-$ を下回った場合, 反対側の δ_{max} , あるいは δ_{min} は $-\delta_c^-$, あるいは δ_c^+ へ遷移する。また, δ がひび割れ領域 ($-\delta_y^- < \delta_{min}$ かつ $\delta_y^+ > \delta_{max}$) から初めて δ_y^+ を超えた, もしくは $-\delta_y^-$ を下回った場合, 反対側の δ_{min} , δ_{max} はそれぞれ $-\delta_y^-$, δ_y^+ へ遷移する。なお, 最大変形点は常に骨格曲線上に存在する。
- ③ 線形領域から δ が初めて δ_c^+ を超えた, もしくは $-\delta_c^-$ を下回った場合, またはこれまでの最大変形点 δ_{max} を超えた, もしくは δ_{min} を下回った場合には骨格曲線上を進む。線形領域の外側において荷重 P が载荷から除荷へと移行した場合は, 戻り点から復元力が 0 になるまで K_r^+ , あるいは K_r^- で戻り, δ 軸上から反対側の今までの最大変形点を目指す。ここで K_r^+ , K_r^- はそれぞれ次式によって定義される。

$$K_r^+ = K_e \cdot \left| \frac{\delta_{max}}{\delta_c^+} \right|^{-\beta^+} \quad K_r^- = K_e \cdot \left| \frac{\delta_{min}}{\delta_c^-} \right|^{-\beta^-}$$

ここで, K_e : 第一勾配 β^+ : 正側入力係数 β^- : 負側入力係数
 デフォルトでは $\beta^+ = \beta^- = 0.4$

- ④ 復元力 0 の点から最大変形点に向かう直線上から戻る場合も復元力が 0 になるまでは K_r^+ または K_r^- で戻り, その後反対側の今までの最大変形点を目指す。

上記のルールの図化したものを次項に示す。

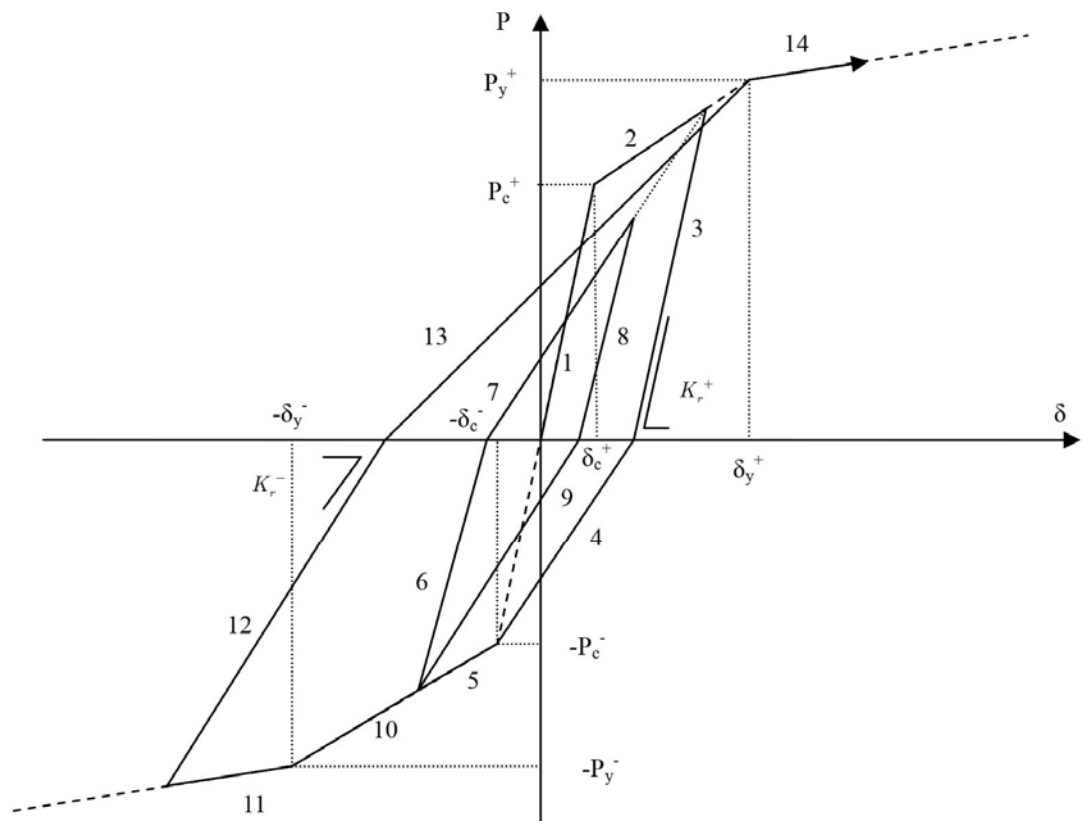


図6-1 修正武田モデル

<6.9 修正武田モデルの参考文献>

- 1) FLIP ROSE (Ver. 7.3.0_2) 取扱説明書
- 2) 武田寿一：鉄筋コンクリート建物の動的計算, コンクリートジャーナル, Vol. 12, No. 8, 1974. 8.
- 3) 土木学会コンクリート委員会編：2002年制定 コンクリート標準示方書[耐震性能照査編] (Ⅲ. 改訂資料), 2002. 12.

6.10 杭－地盤相互作用ばね

杭基礎構造物－地盤系の耐震解析を2次元一体解析として行うには、既往検討^{1)~6)}で評価した、杭－地盤相互作用ばねの特性を持つばね要素（以下、杭－地盤相互作用ばね要素）により、杭モデルと2次元地盤モデルを接続する。まず、奥行き方向幅が杭間隔に等しい2次元地盤モデルと奥行き方向に等間隔に配置された杭群中の杭径Dの杭1本分のモデルを用意する。地盤要素にはマルチスプリング要素を適用し、杭は線形または非線形のばね要素でモデル化する。杭節点と対応する2次元地盤モデルの地盤節点の水平方向並進自由度を、図6-4に示すように、杭－地盤相互作用ばね要素により接続する。

このような2次元一体解析のモデルにおいて、杭－地盤相互作用ばね要素は以下に示すように動作する。

- ① 杭の循環境界に対する相対変位 u を算定する。なお、循環境界変位として、一体解析モデルを構成する地盤モデルの対応する節点変位を参照する。

- ② 相対変位 u から、次式を用いて、対応するせん断ひずみ γ を評価する。

$$\gamma = u / (D \times \beta_p)$$

なお、 β_p は、土質、不飽和・飽和などの土の状態、杭間隔、荷重レベル（荷重片振幅／破綻荷重＝せん断応力片振幅／初期せん断強度）及び液状化フロントパラメータ S_0 に応じて、図6-3から定める。

- ③ 杭近傍の土要素を参照して、その変形特性を決めるパラメータと土の状態（主に、有効拘束圧と液状化フロントパラメータ S_0 ）に基づいて、砂の構成則と同様のせん断応力－せん断ひずみ関係を設定し、せん断ひずみ γ を与えてせん断応力 τ を算定する。

- ④ せん断応力 τ から、次式を用いて、ばね力 F を評価する。

$$F = (L \times D \times \alpha_p) \times \tau$$

なお、 α_p は応力－荷重変換係数で、杭間隔と単調載荷時の（破綻荷重／初期せん断強度 τ_{m0} ）の分布（図6-3）より定まる11.5～12.6の範囲の値である。

上記②において、液状化を考慮する場合に、ひずみ－変位変換係数 β_p の値を決めるには、近傍土要素の液状化フロントパラメータ S_0 の値を参照する必要がある。ある S_0 の値に対しては、 β_p は概ね一定値を取るため、定数とするか、過去に経験した最大の荷重レベルを適用することが考えられる。図6-5は、杭間隔5Dの場合の飽和砂（ $N_{65}=10$ 、 $\sigma_{m0'}=98\text{kPa}$ 、 $S_0=1.0, 0.5, 0.05, 0.005$ ）を対象とした水平断面モデルによる繰り返し載荷解析で得られた荷重片振幅－最大相対変位関係と過剰間隙水圧モデルに基づいて設定したせん断応力 τ －せん断ひずみ γ 関係から設定した荷重－変位関係を比較したものである。過剰間隙水圧モデルに基づき設定した関係では、荷重＝ $12.6 \times \tau$ 、変位＝ $1.5 \times \gamma$ （ $S_0=1.0, 0.5$ ）、または、変位＝ $1.63 \times \gamma$ （ $S_0=0.05, 0.005$ ）とした。ひずみ－変位変換係数 β_p は荷重レベルに依存して変化する量だが、このように、荷重レベルによらない定数と置いても、全体系の解析結果をよく説明するので、このような取扱いでもよい。

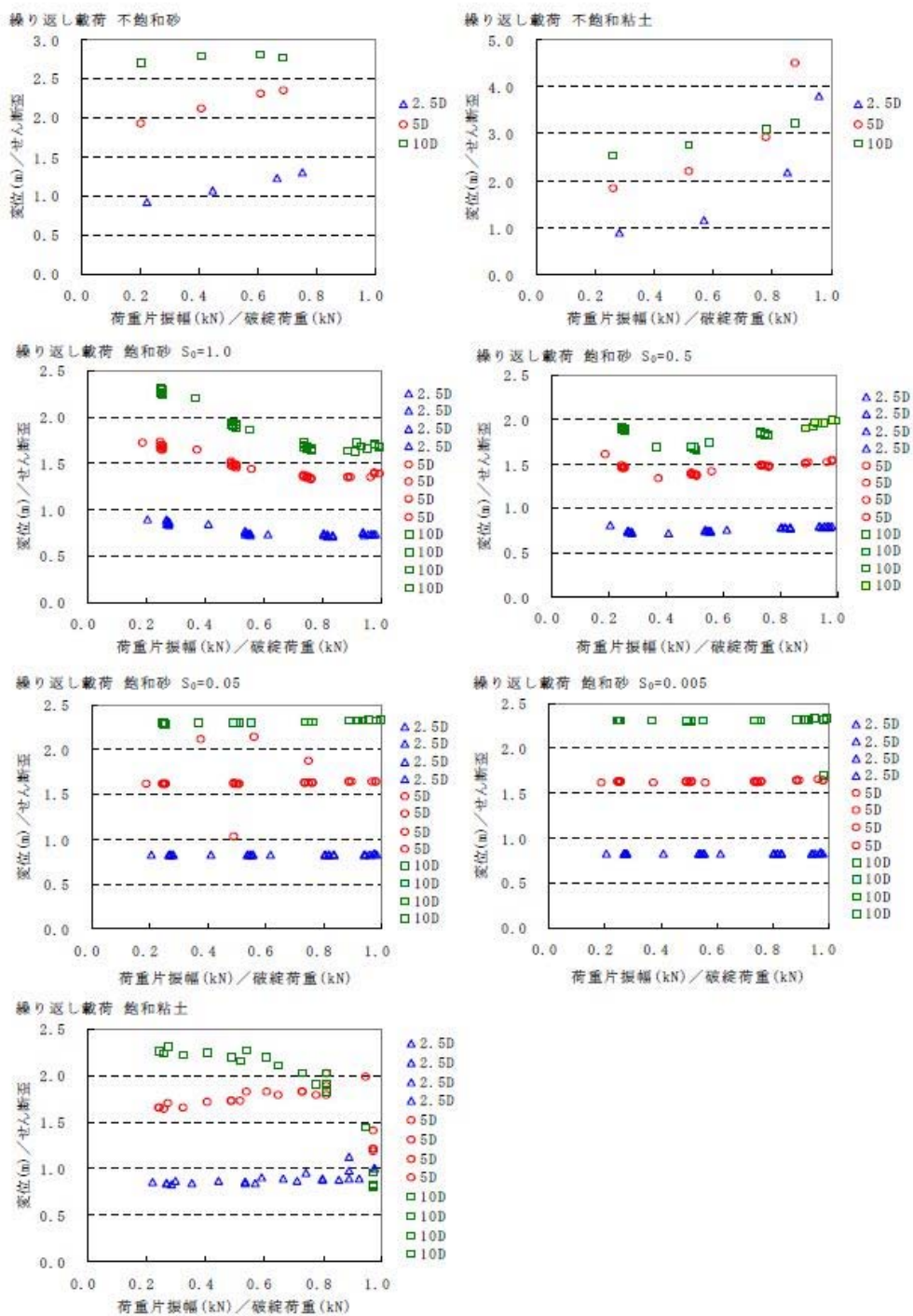


図 6-2 循環境界基準の相対変位振幅と要素シミュレーションのせん断ひずみ振幅の比を
求めるためのチャート

※ 破綻荷重で正規化した荷重片振幅と杭間隔の関数として表示。

なお、破綻荷重=12.6 (2.5Dの場合は11.5) × τ_{m0}

単調載荷 全17ケース×杭間隔3ケース 破綻荷重／初期せん断強度 τ_{m0}

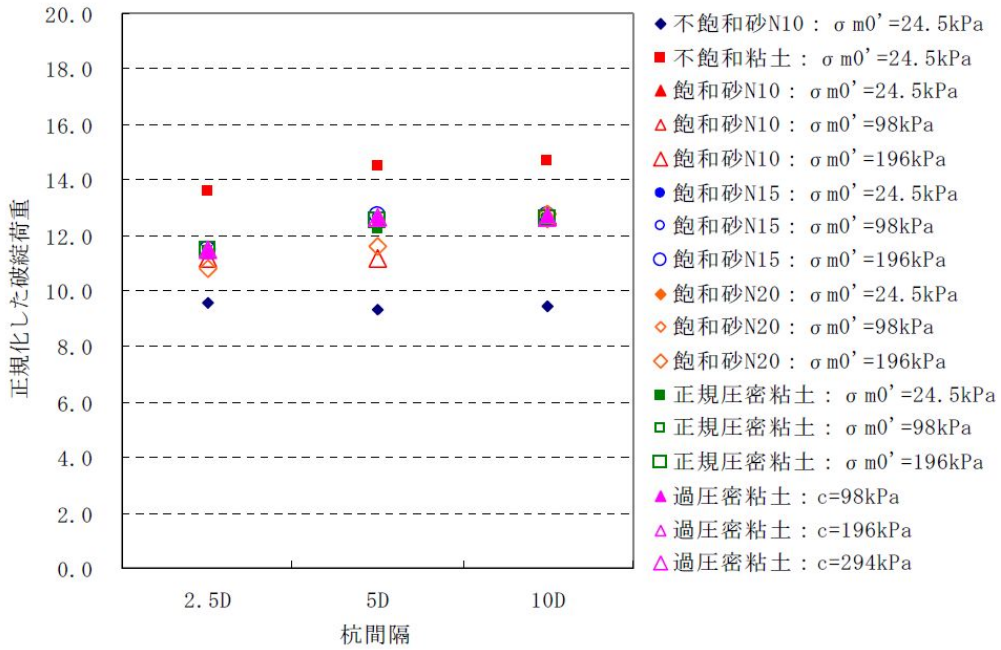


図 6-3 単調載荷時の (破綻荷重／初期せん断強度 τ_{m0}) の分布

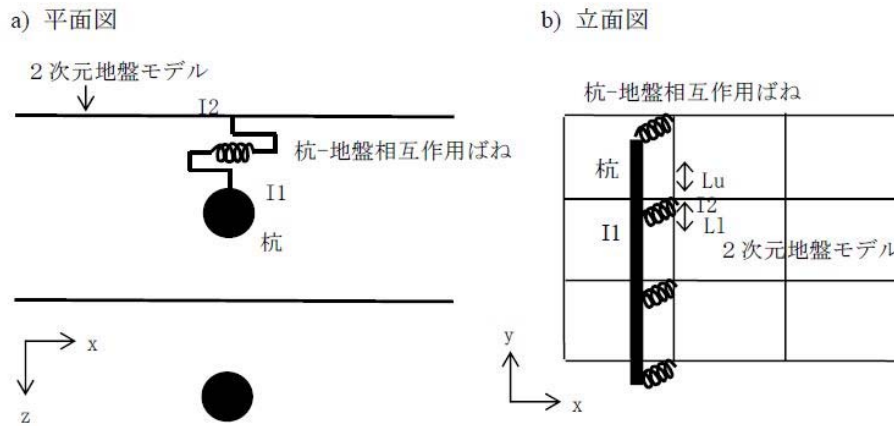


図 6-4 杭-地盤相互作用ばねによる 2次元一体解析の杭モデルと地盤モデルの連結方法 (模式図)

※I1は杭-地盤相互作用ばね要素の杭側節点, I2は地盤側節点, L_u はばねの上側配長 (隣接する上側のばねまでの半分の長さ), L_1 はばねの下側支配長を表す。

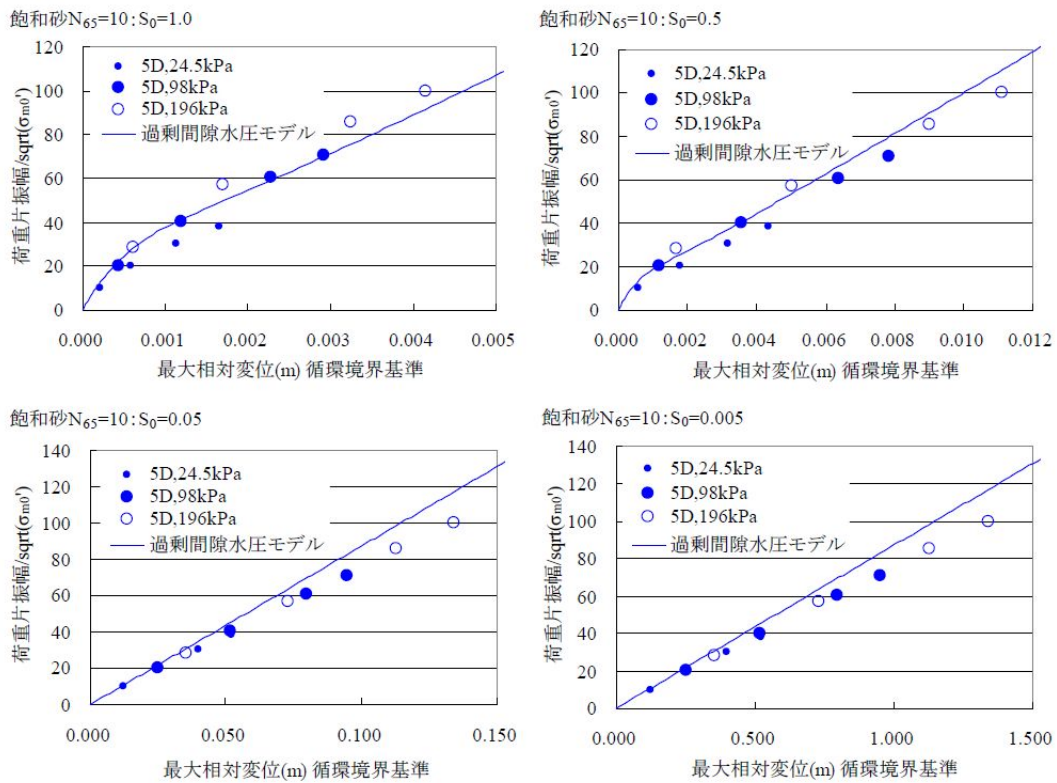


図 6-5 飽和砂 (5D, $N_{65}=10$, $\sigma_{m0}'=98\text{kPa}$, $S_0=1.0, 0.5, 0.05, 0.005$) :
荷重片振幅-最大相対変位の関係と過剰間隙水圧モデル他に基づいて求めた関係の比較

- ※1 過剰間隙水圧モデルによる曲線は、 τ と S_0 からせん断強度 τ_f と初期せん断剛性 G_0 を求めて、双曲線関係に基づくせん断応力 τ - せん断ひずみ γ 関係を設定し、それを荷重-変位関係に置き換えたもの。
置き換えは、荷重 = $12.6 \times \tau$ 、変位 = 1.5 (または 1.63) $\times \gamma$ とした。
- ※2 全体系で解いた解が、大きな荷重では、過剰間隙水圧モデルによる曲線の下側に来るのは、荷重ステップ間隔の増大による精度低下によるものと思われる。また、変位-ひずみ変換係数は、荷重片振幅に依存する量だが、このように定数と置いても、全体系の解析結果をよく説明する。

<6.10 杭-地盤相互作用バネの参考文献>

- 1) 三輪滋, 小堤治, 溜幸生, 岡由剛, 一井康二, 井合進, 田河祥一: 2次元水平断面モデルを用いた液状化地盤における杭-地盤系の相互作用の検討, 第38回地盤工学研究発表会, 2003.
- 2) 森田年一, 井合進, Hanlong Liu, 一井康二, 佐藤幸博: 液状化による構造物被害予測プログラムFLIPにおいて必要な各種パラメタ簡易設定法, 港湾技研資料, No. 869, 1997.
- 3) Towhata, I. and Ishihara, K.: Modelling Soil Behavior under Principal Stress Axes Rotation, Proc. of 5th International Conf. on Num. Methods in Geomechanics, Nagoya, Vol. 1, pp. 523-530, 1985.
- 4) Iai, S., Matsunaga, Y. and Kameoka, T.: Strain space plasticity model for cyclic mobility, Report of Port and Harbour Research Institute, Vol. 29, No. 4, pp. 27-56, 1990.
- 5) 小堤治, 溜幸生, 岡由剛, 一井康二, 井合進, 梅木康之: 2次元有効応力解析における杭と液状化地盤の相互作用のモデル化, 第38回地盤工学研究発表会, 2003.
- 6) 小堤治, 溜幸生, 岡由剛, 井合進, 梅木康之: 2次元有効応力解析における杭と液状化地盤の動的相互作用のモデル化, 第58回土木学会年次学術講演会, 2003.

7. 線形はり要素の検証

7.1 概要

6章で説明した基本的な要素を代表して構造物や杭等のモデル化で使用している線形はり要素について、簡易なモデルを用いて検証を実施し応答結果が妥当であることを確認した。

7.2 例題

下図に示す梁長8mを8分割した単純梁のモデルを作成し、理論解と比較することで応答結果が妥当であることを確認した。荷重としては自由端への集中荷重 $P=2\text{N}$ 及び梁全体への等分布荷重 $W=2\text{N/m}$ を設定し、たわみ分布及び曲げモーメント分布を理論解と比較した。

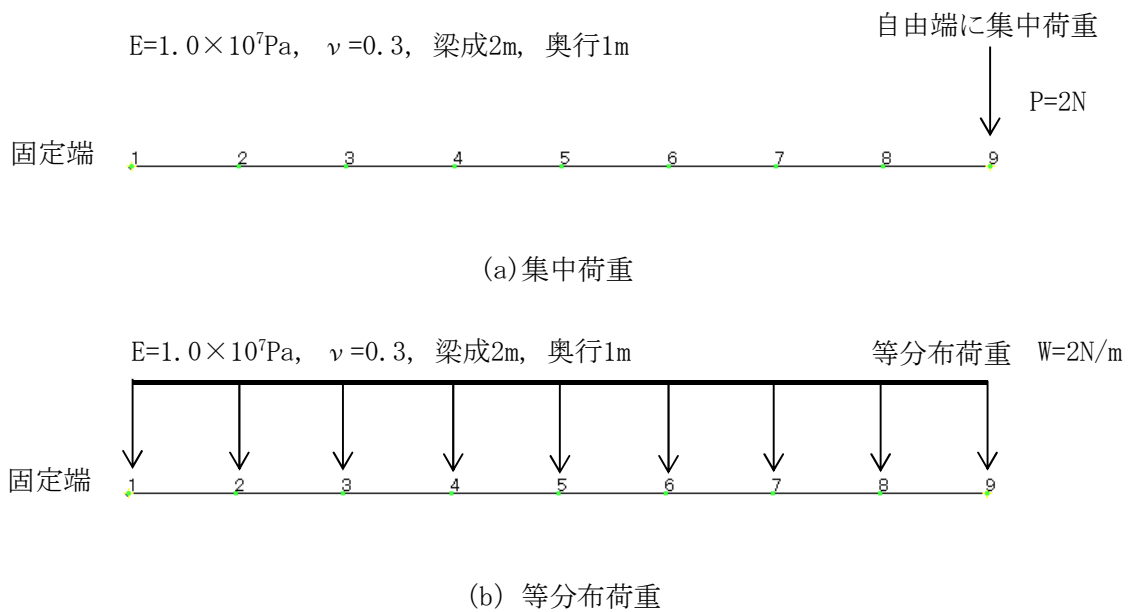


図 7-1 例題で設定したモデル及びパラメータ

また、片持梁のたわみ δ と曲げモーメント M の理論解は梁長を L 、ヤング率を E 、断面2次モーメントを I とし、固定端からの距離を x として次式から与えられる。

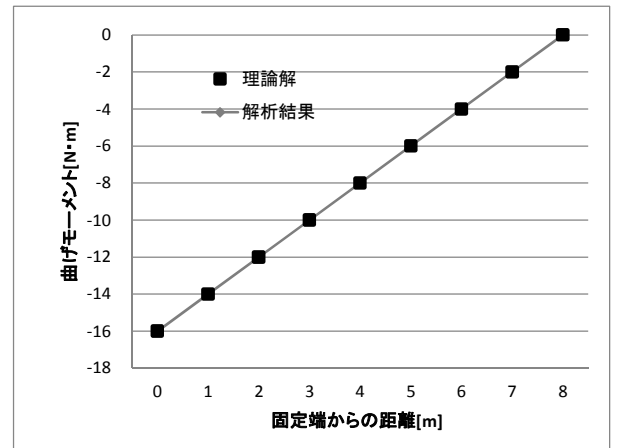
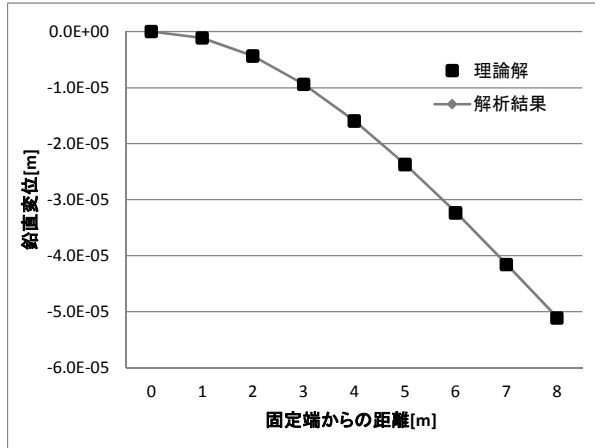
$$\text{集中荷重}P\text{ 載荷時の理論解: } \delta(x) = -\frac{P}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - L \frac{x^2}{2} \right) \quad M(x) = -P(L-x)$$

$$\text{等分布荷重}W\text{ 載荷時の理論解: } \delta(x) = -\frac{W}{2EI} \left(\frac{x^4}{12} - L \frac{x^3}{3} + L^2 \frac{x^2}{2} \right) \quad M(x) = -W \frac{(L-x)^2}{2}$$

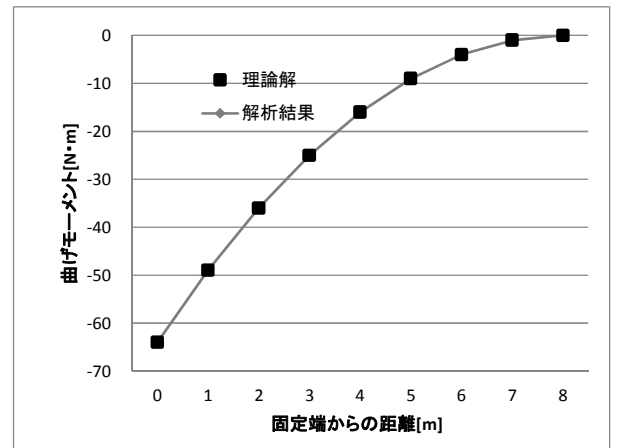
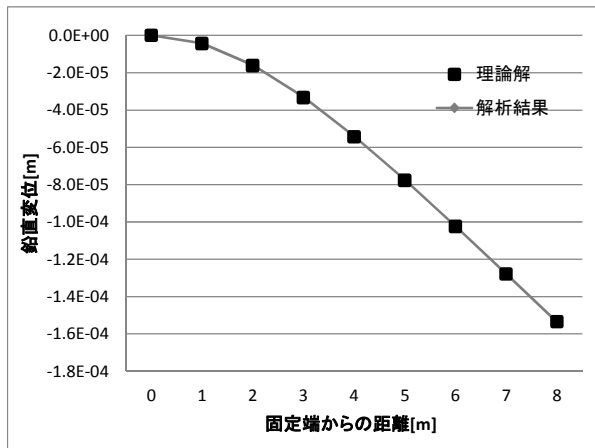
7.3 検証結果

以下に集中荷重及び分布荷重を与えた場合の理論解とたわみ分布及び曲げモーメントの分布の解析結果との比較結果を示す。

下図に示す通り、理論解と概ね一致を示しており応答結果が妥当であることを確認した。



(a) 集中荷重



(b) 等分布荷重

図7-2 理論解と解析結果の比較

8. 修正武田モデルの検証

8.1 概要

修正武田モデルについては、簡易なモデルにてテスト例題解析を実施し、理論値と比較した検証記録がFLIP Ver. 7.3.0_2のマニュアルに記載されている。テスト例題及びそのテスト例題結果を検証記録とする。

8.2 例題

以下に例題を記載する。

(5) テスト例題

図 11.1-2のような2節点1要素からなる非線形はり要素に対して、節点①の全自由度を拘束し、節点②に節点集中力 F_x を作用させ、要素中央の $M-\phi$ 関係を計算した。使用したパラメータを表 11.1-1に示す。ただし、表 11.1-1右側の非対称モデルパラメータ(iasym = 1)はテスト例題 6 のみに使用し、そのほかのテスト例題はすべて対称モデル(iasym = 0)とする。以下にテスト例題の結果について示す。

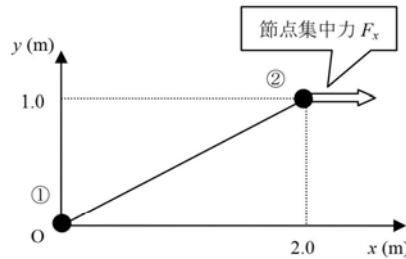


図 11.1-2 テスト例題

表 11.1-1 テスト例題に使用したパラメータ

せん断剛性	100 (kN/m)			
ポアソン比	0.3			
質量密度	2 (t/m ³)			
断面積	4 (m ²)			
有効せん断面積係数	0.5			
第一勾配	20 (kN・m ²)	以下はテスト例題 6 のみ		
第二勾配	10 (kN・m ²)	第二勾配(負側)	7 (kN・m ²)	
第三勾配	1 (kN・m ²)	第三勾配(負側)	0.1 (kN・m ²)	
第一折れ点モーメント	5 (kN・m)	第一折れ点モーメント(負側)	3 (kN・m)	
第二折れ点モーメント	7 (kN・m)	第二折れ点モーメント(負側)	10 (kN・m)	
除荷剛性低下指数	0.4	除荷剛性低下指数(負側)	0.4	

図8-1 例題で設定したモデル及びパラメータ

※FLIP ROSE (Ver. 7.3.0_2) 取扱説明書より

8.3 例題結果 (検証結果)

以下に8つのテスト例題結果を示す。

※以下FLIP ROSE (Ver. 7.3.0_2) 取扱説明書より

a) テスト例題 1(対称:トリリニア試験)

図 11.1-2のはり要素に対して、節点集中力を 30kN まで段階的に作用させ、M-φ 関係を解析した。図 11.1-3に結果を示す。

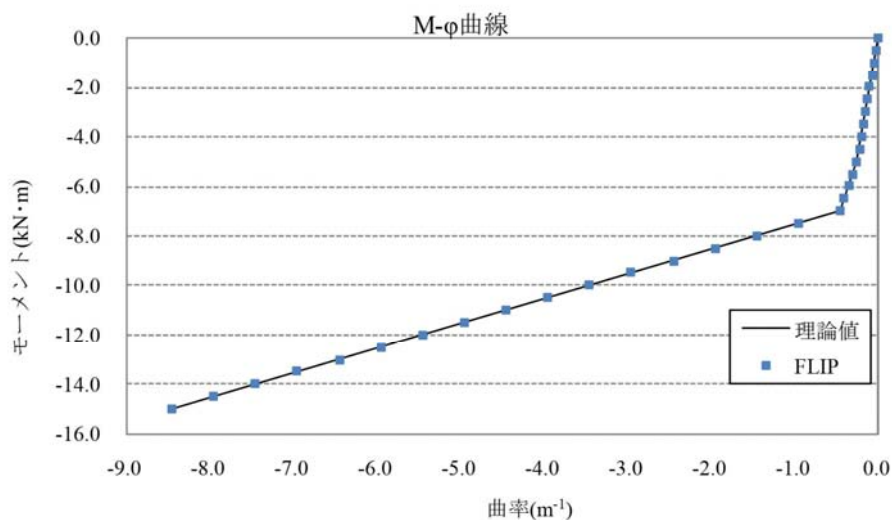


図 11.1-3 テスト例題 1(対称:トリリニア試験)の結果 M-φ 関係

b) テスト例題 2(対称:線形領域)

図 11.1-2のはり要素に対して、節点集中力 $F_x = 9.0\sin(\pi t/10)$ を $t = 0 \sim 70$ (s)まで作用させ、M-φ 関係を解析した。図 11.1-4に結果を示す。

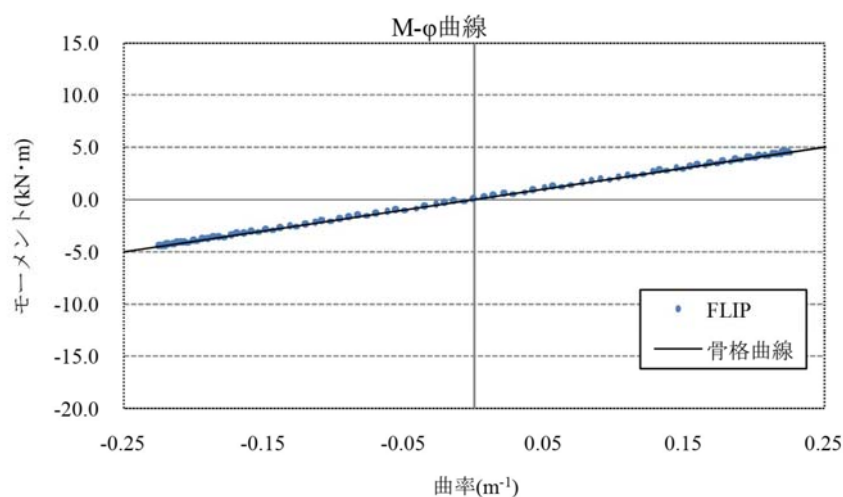


図 11.1-4 テスト例題 2(対称:線形領域)の結果 M-φ 関係

図8-2 テスト例題1及び2

c) テスト例題 3(対称:第一折れ点を超える)

図 11.1-2のはり要素に対して、節点集中力 $F_x = 12.0\sin(\pi t/30)$ を $t = 0\sim 50$ (s)まで作用させ、M-φ関係を解析した。図 11.1-5に結果を示す。

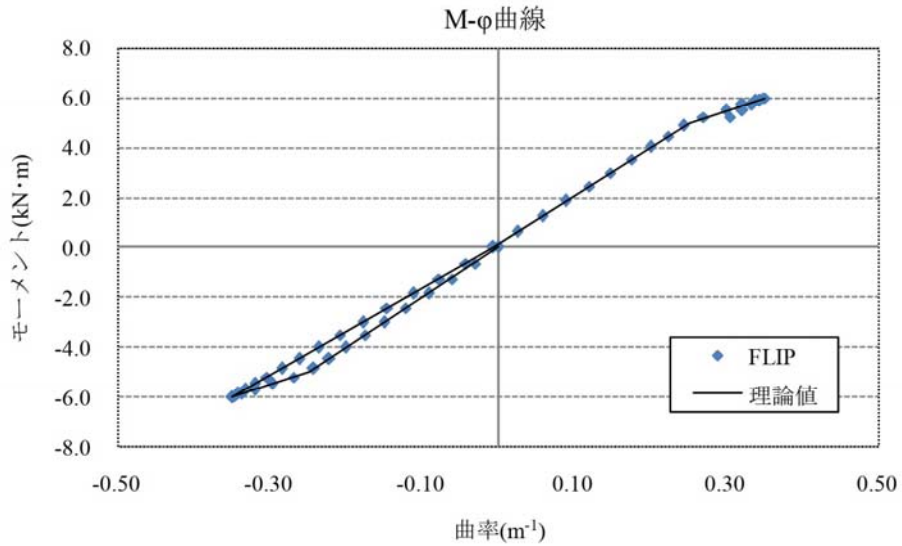


図 11.1-5 テスト例題 3(対称:第一折れ点を超える)の結果 M-φ関係

d) テスト例題 4(対称:第二折れ点を超える)

図 11.1-2のはり要素に対して、節点集中力 $F_x = 30.0\sin(\pi t/20)$ を $t = 0\sim 70$ (s)まで作用させ、M-φ関係を解析した。図 11.1-6に結果を示す。

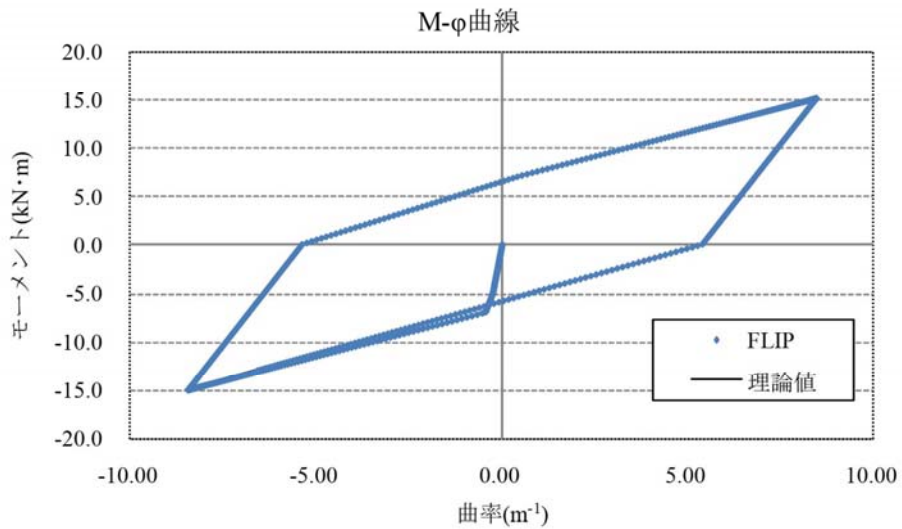


図 11.1-6 テスト例題 4(対称:第二折れ点を超える)の結果 M-φ関係

図8-3 テスト例題3及び4

e) テスト例題 5(対称:第二折れ点を超え、最大変形点を更新)

図 11.1-2のはり要素に対して、節点集中力 $F_x = 0.1t + 25.0 \sin(\pi t/10)$ を $t = 0 \sim 70$ (s)まで作用させ、M-φ 関係を解析した。図 11.1-7に結果を示す。

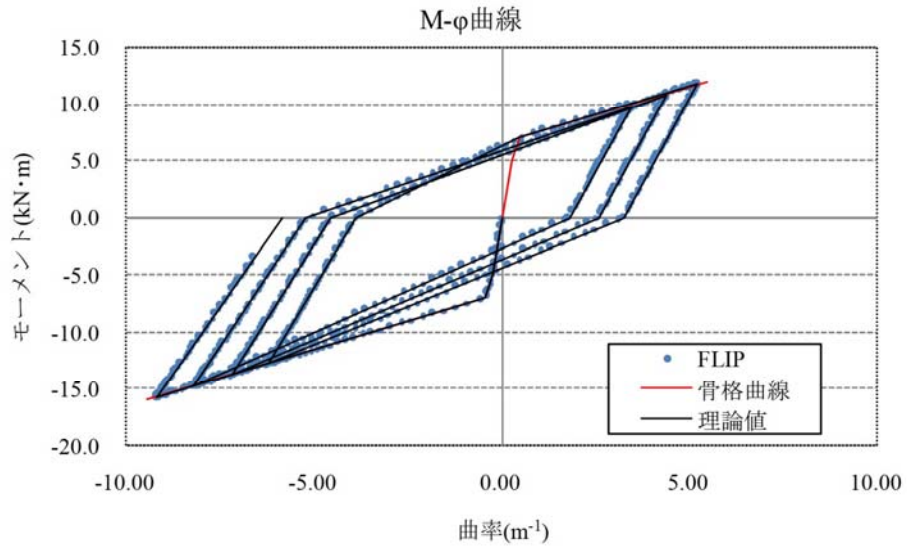


図 11.1-7 テスト例題 5(対称:第二折れ点を超え、最大変形点を更新)の結果 M-φ 関係

f) テスト例題 6(非対称:第二折れ点を超え、最大変形点を更新)

図 11.1-2のはり要素に対して、節点集中力 $F_x = 0.05t + 25.0 \sin(\pi t/10)$ を $t = 0 \sim 70$ (s)まで作用させ、M-φ 関係を解析した。図 11.1-8に結果を示す。

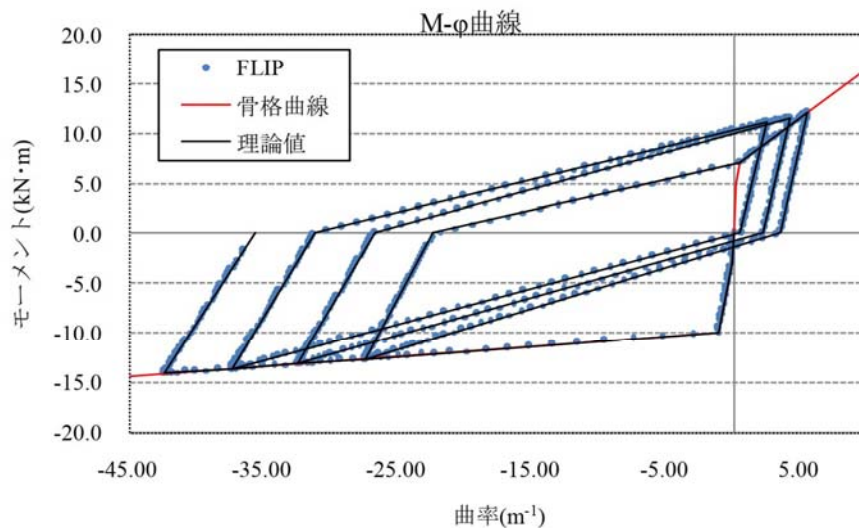


図 11.1-8 テスト例題 6(非対称:第二折れ点を超え、最大変形点を更新)の結果 M-φ 関係

図8-4 テスト例題5及び6

g) テスト例題 7(対称：第一折れ点を超え、除荷中に反転)

図 11.1-2のはり要素に対して、節点集中力 $F_x = 0.1 t + 12.0 \sin(\pi t/30)$ を $t = 0 \sim 60$ (s)まで作用させ、M-φ 関係を解析した。図 11.1-9に結果を示す。ただし、図をわかりやすくするため、第二勾配を 0.1、第三勾配を 0.01 とした。

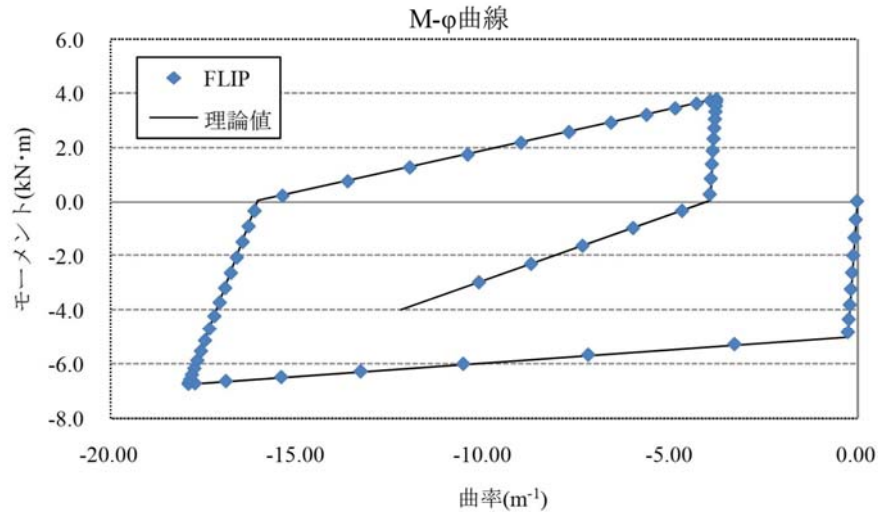


図 11.1-9 テスト例題 7(対称：第一折れ点を超え、除荷中に反転)の結果 M-φ 関係

h) テスト例題 8(対称：第二折れ点を超え、除荷中に反転)

図 11.1-2のはり要素に対して、節点集中力 $F_x = 0.1 t + 13.0 \sin(\pi t/30)$ を $t = 0 \sim 60$ (s)まで作用させ、M-φ 関係を解析した。図 11.1-10に結果を示す。ただし、図をわかりやすくするため、第二勾配を 0.1、第三勾配を 0.01 とした。

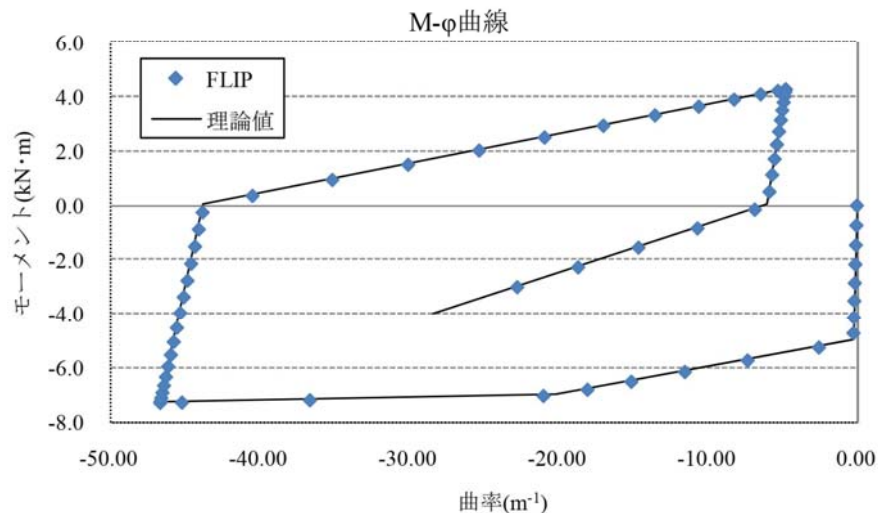


図 11.1-10 テスト例題 8(対称：第二折れ点を超え、除荷中に反転)の結果 M-φ 関係

図8-5 テスト例題7及び8

8.4 軸力の変動が部材の非線形特性に与える影響（取水構造物の耐震安全評価に関する参考資料）

取水構造物の地震応答解析では、鉄筋コンクリート部材及び鋼管杭を非線形はり要素にてモデル化している。この非線形特性として、鉄筋コンクリート部材における非線形特性（ $M-\phi$ 関係）にトリリニアモデル（修正武田モデル）を、鋼管杭における非線形特性（ $M-\phi$ 関係）にバイリニアモデルを適用しているが、有効応力解析コード「FLIP Ver. 7.3.0_2」における当該非線形特性では、地震時における部材の軸力は一定とされる。

よって、本項では、基準地震動 S_s を入力とした地震応答解析による各部材の軸力及び曲げモーメントの変動範囲を踏まえた上で、それが部材の非線形特性に与える影響を検討し、取水構造物の耐震評価において軸力が一定とされる有効応力解析コード「FLIP Ver. 7.3.0_2」の当該非線形特性を用いることの妥当性を検討する。

部材の軸力変動範囲を確認するための解析ケースを以下に示す。

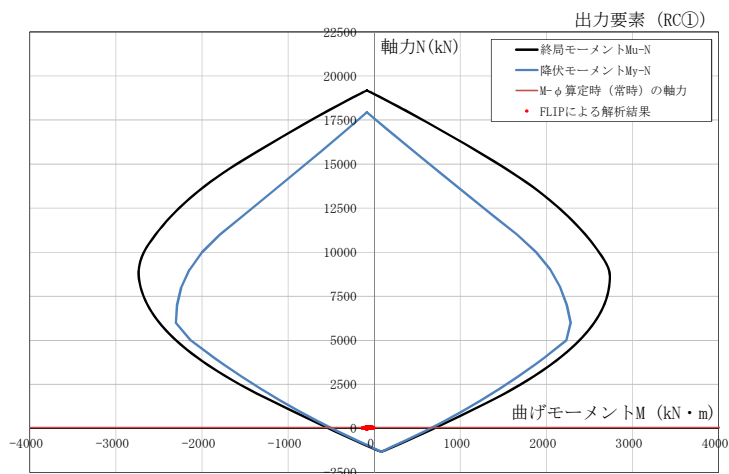
- ・入力地震動： $S_s - D1$ （H+, V+）
- ・検討ケース：①原地盤に基づく液状化強度特性を用いた解析ケース（基本ケース）
- ・解析断面：④-④断面（取水ピット区間）
- ・確認対象部材：図8-6に示す通り。



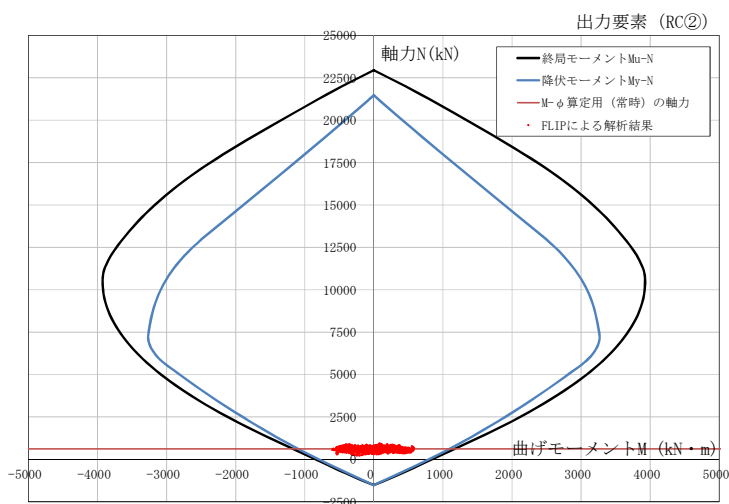
図8-6 軸力及び曲げモーメントの変動範囲の確認対象部材

図8-7にて、鉄筋コンクリート部材における軸力及び曲げモーメントの変動範囲と、当該部材の M_u （終局モーメント）- N （軸力）関係及び M_y （降伏モーメント）- N （軸力）関係を比較した。また、同図には、FLIPにて非線形特性として用いられている M_u 及び M_y の設定根拠である常時応力解析による当該部材の軸力をプロットしている。

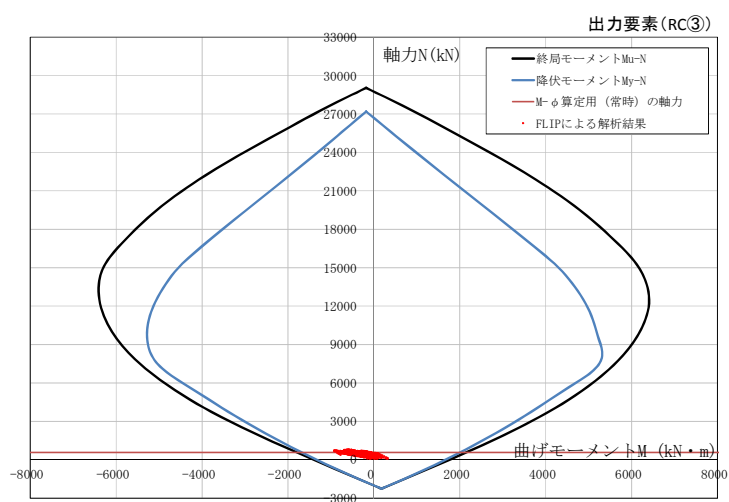
基準地震動 S_s による応答結果によると、地震時の鉄筋コンクリート部材における軸力の変動範囲は限定的であり、概ね常時応力解析における軸力と同等の範囲に収まっている。また、部材に発生する曲げモーメントは M_y （降伏モーメント）以下であり、概ね弾性範囲内に収まっている。以上より、鉄筋コンクリート部材において、軸力の変動が部材の非線形特性に与える影響は軽微であり、耐震評価において軸力が一定とされる有効応力解析コード「FLIP Ver. 7.3.0_2」の当該非線形特性を用いることは妥当である。



(RC①)



(RC②)



(RC③)

図8-7 基準地震動 S_s による取水構造物の部材の応答範囲

また、同様の地震応答解析結果を参照し、鋼管杭における軸力変動範囲を把握した上で、その変動が非線形特性（バイリニアモデル）における M_p （全塑性モーメント）にどの程度影響するかを検討した。

基準地震動 S_s による地震応答解析により、図8-6に示す鋼管杭要素にて得られた最大発生軸力 N_{max} 及び最小発生軸力 N_{min} を用いて、 M_p （全塑性モーメント）を算定し、バイリニアモデルを設定した。各軸力におけるバイリニアモデルの比較を図8-8に示す。

いずれの軸力においても、 M_p （全塑性モーメント）に有意な差は無いことから、鋼管杭において、軸力の変動が部材の非線形特性に与える影響は軽微であり、耐震評価において軸力が一定とされる有効応力解析コード「FLIP Ver. 7.3.0_2」の当該非線形特性を用いることは妥当である。

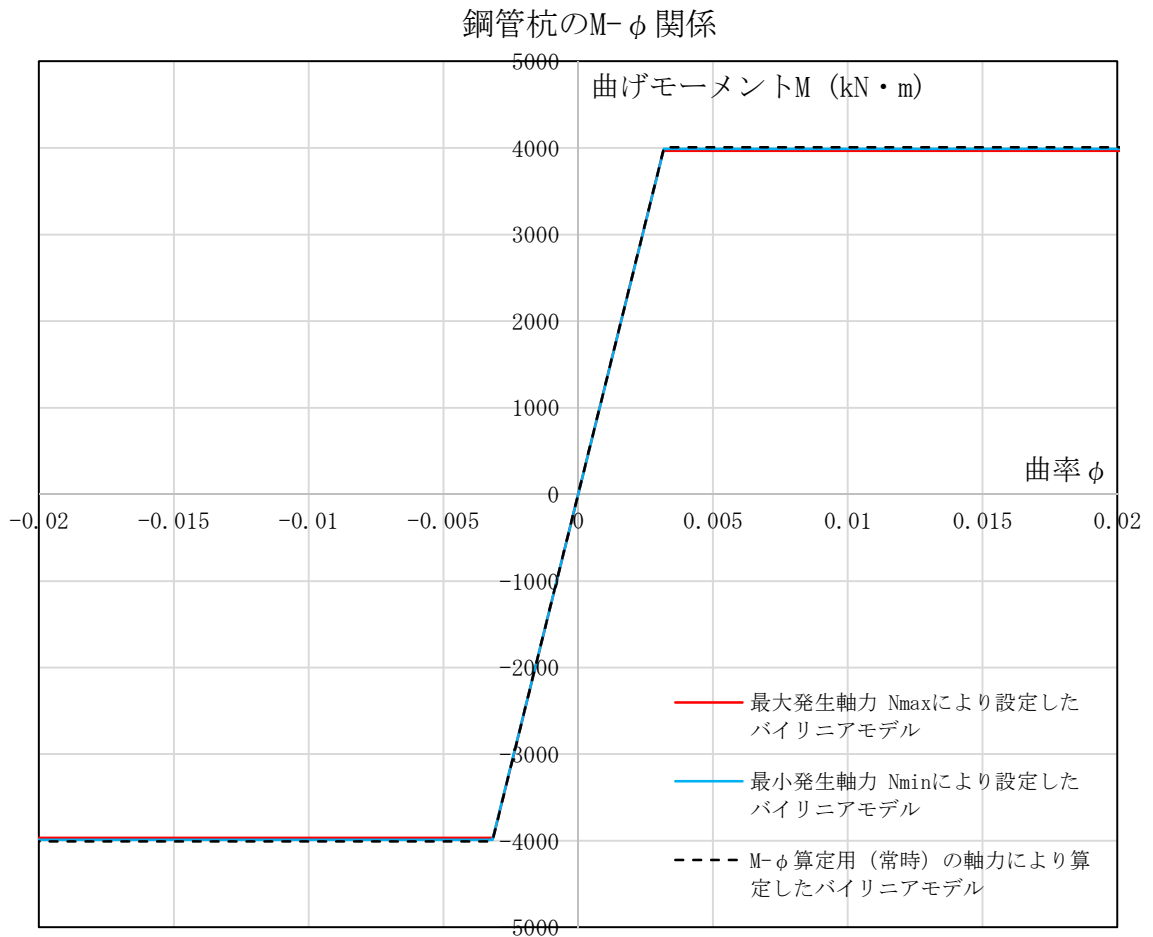


図8-8 鋼管杭の発生軸力により設定したバイリニアモデル

9. 杭-地盤相互作用ばねモデルの検証

9.1 概要

東海第二発電所の有効応力解析にはFLIP Ver. 7.3.0_2を用いる。他プラントの既工事計画で使用されたバージョン (Ver. 7.2.3_4) との主な変更点は、杭-地盤相互作用ばね要素の導入である。そこで、FLIP Ver. 7.3.0_2とVer. 7.2.3_4を用いて、杭-地盤相互作用ばね要素の検証及び妥当性確認を行った。

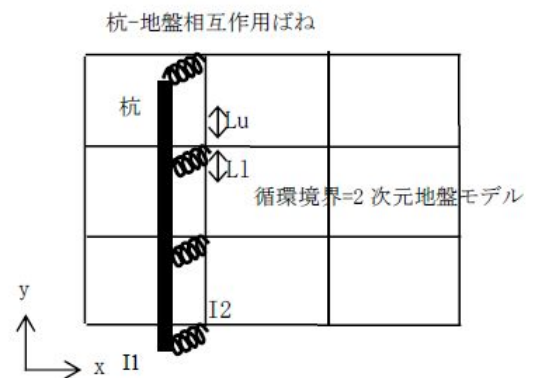
9.2 杭と周辺地盤との相互作用

杭と周辺地盤との相互作用として、Ver. 7.3.0_2では杭-地盤相互作用ばね要素を用いる。また、Ver. 7.2.3_4ではジョイント要素を用いるものとする。両者の設定方法を以下に述べる。

a) 杭-地盤相互作用ばね要素の支配長

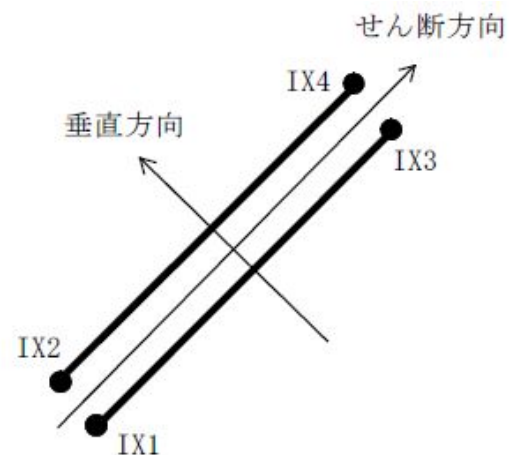
杭-地盤相互作用ばね要素は、その上側支配長 L_u と下側支配長 L_1 を自動的に決定する。I1節点（杭側節点）に接続するはり要素を上方に辿り、次の杭-地盤相互作用ばね要素が接続する節点までの距離の半分を上側支配長 L_u とする。そのような節点がない場合は $L_u=0$ とする。同様に、下側支配長 L_1 も算定する。

鉛直断面



b) ジョイント要素の配置

ジョイント要素は、土（マルチスプリング要素等またはマルチスプリング要素等+間隙水要素）と矢板（線形はり要素）やケーソン（線形平面要素）等の構造物の接触面上（節点間）に置いて、その間の滑り・剥離を表現するのに用いる。



9.3 解析結果

比較対象：鋼管杭鉄筋コンクリート防潮堤

Ver. 7.3.0_2の杭軸方向の杭－地盤相互作用ばね要素とVer. 7.2.3_4の杭軸方向のジョイント要素は、名称は異なるものの実質の構成式としては同じである。また、杭軸直角方向についてはVer. 7.3.0_2とVer. 7.2.3_4で杭軸直交方向の杭－地盤相互作用ばねは名称も構成式も同じである。

Ver. 7.3.0_2とVer. 7.2.3_4により加速度の解析結果の比較を行い、解析結果が同等であることを確認した。Ver. 7.3.0_2では杭－地盤相互作用ばね要素、Ver. 7.2.3_4ではVer. 7.3.0_2の杭－地盤相互作用ばね要素に相当するVer. 7.2.3_4の杭軸方向のジョイント要素を用いた。

Ver. 7.3.0_2での杭軸方向の杭－地盤相互作用ばねのばね定数は、数値解析上不安定な挙動を起こさない程度に十分大きな値として、表9-1のとおり設定した。また、図9-1に杭－地盤相互作用ばねの力学的特性を示す。Ver. 7.2.3_4で設定したVer. 7.3.0_2の杭軸方向の杭－地盤相互作用ばね要素に相当するVer. 7.2.3_4の杭軸方向のジョイント要素の力学的特性も表9-1のとおり設定した。

図9-2に加速度の出力節点の位置図を示す。水平方向加速度の比較を図9-3に、鉛直方向加速度の比較結果を図9-4に示す。

杭軸方向については、Ver. 7.3.0_2では杭軸方向の杭－地盤相互作用ばね要素、Ver. 7.2.3_4では杭軸方向のジョイント要素を用い、杭軸直交方向については、Ver. 7.3.0_2及びVer. 7.2.3_4において同じ杭－地盤相互作用ばねを使用して加速度の解析結果を比較した。その結果、図9-3及び図9-4に示す通り解析結果が一致している。ゆえにVer. 7.3.0_2及びVer. 7.2.3_4において、杭軸方向及び杭軸直交方向の杭と地盤の相互作用に関する解析は同等の解析結果を与えるものであり、杭と地盤の相互作用の処理について両バージョンによる実質的な差異はない。

表9-1 杭－地盤相互作用ばねのばね定数

	せん断剛性 k_s (kN/m^3)
杭軸方向	1.0×10^6

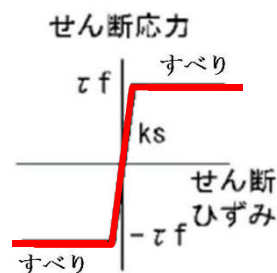


図9-1 杭－地盤相互作用ばね（杭軸方向）の力学的特性



図 9-2 出力節点の位置図

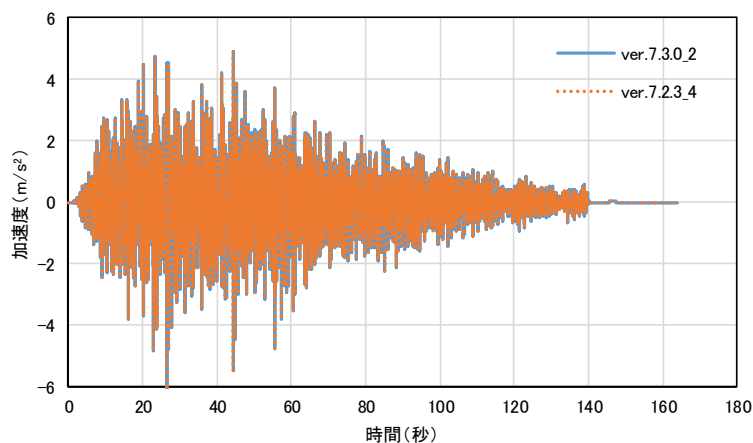
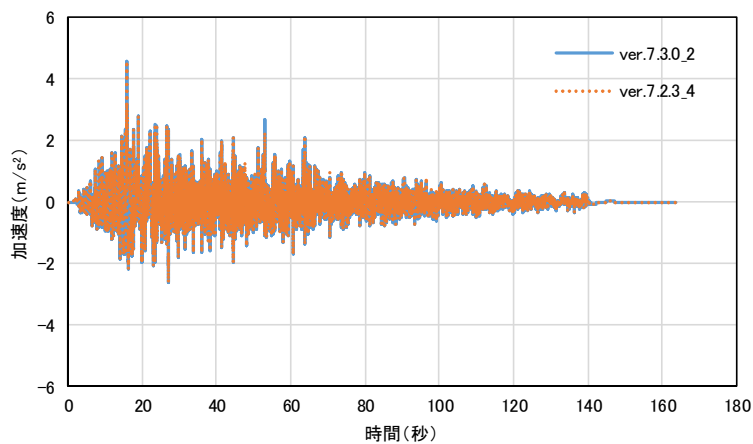
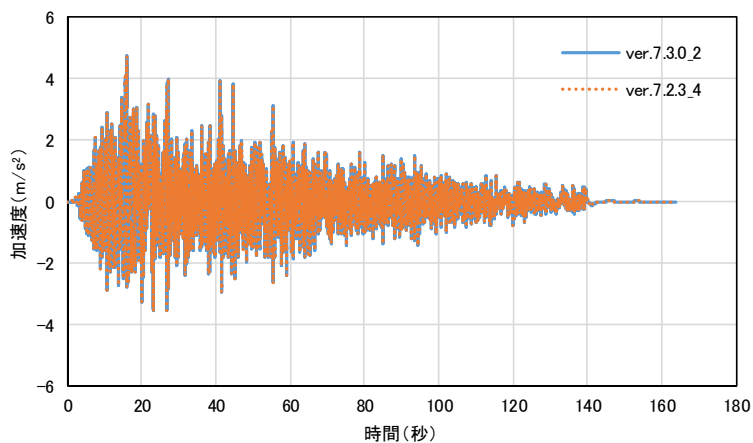
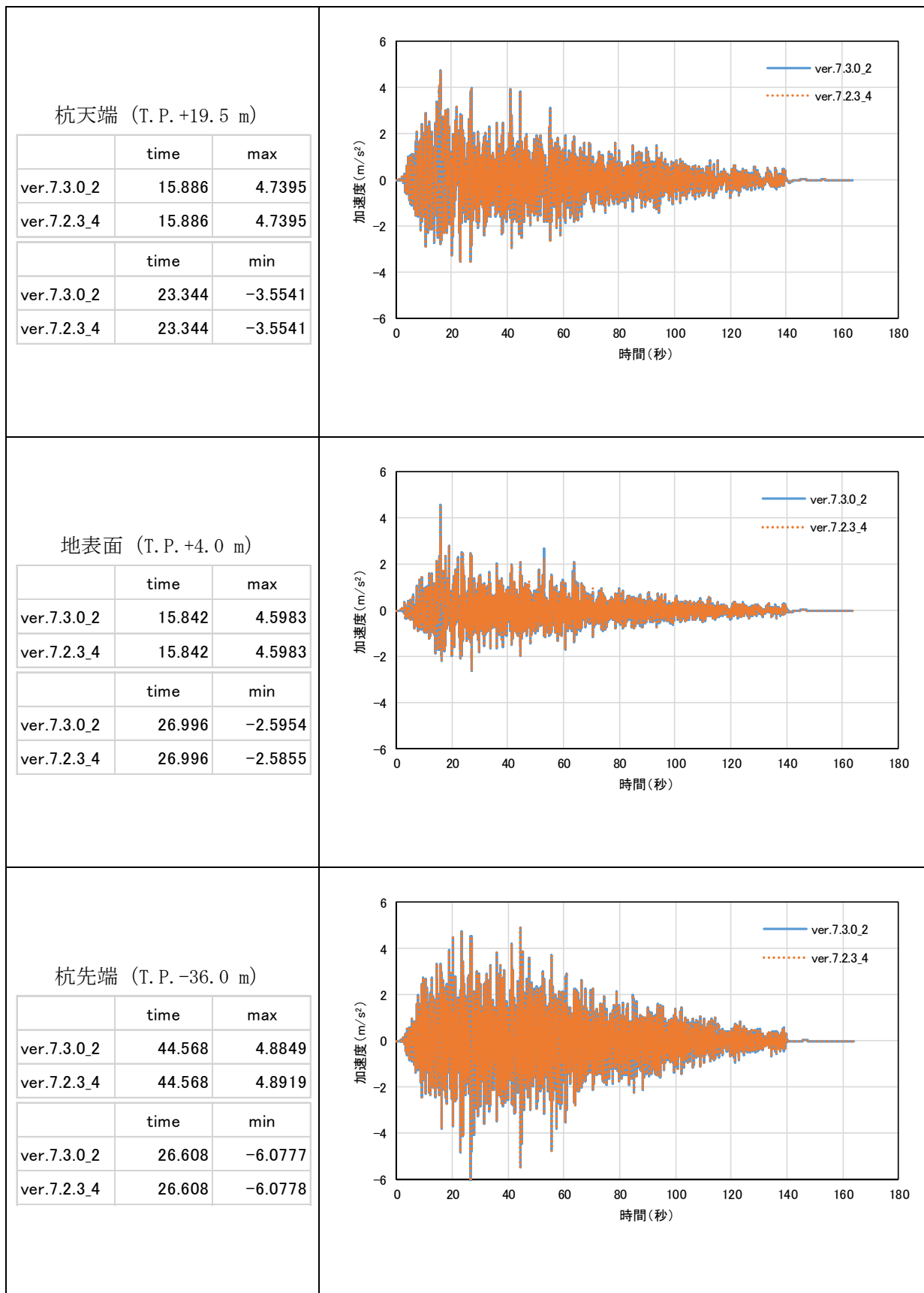


図 9-3 水平方向加速度 (m/s²)

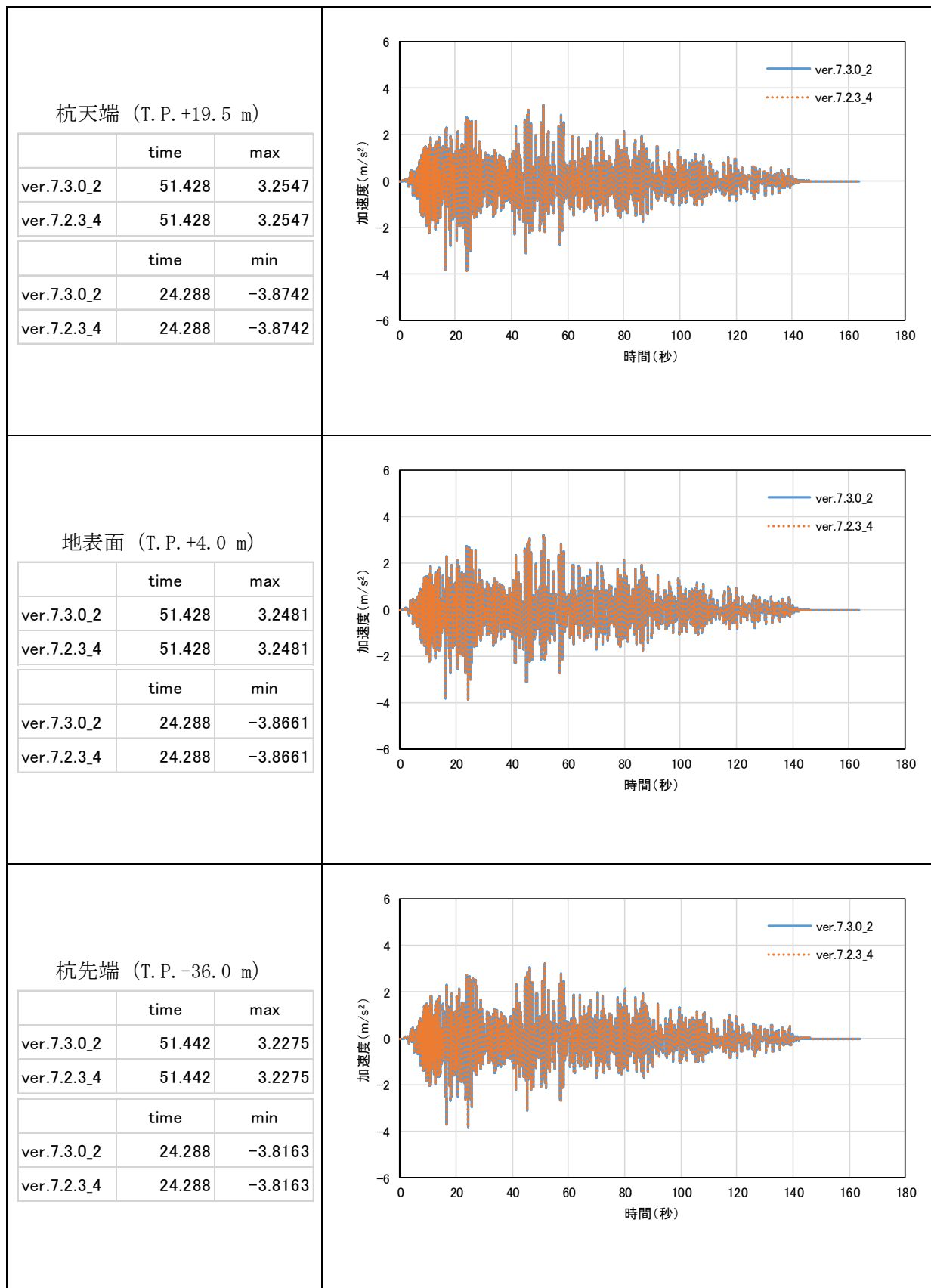


図 9-4 鉛直方向加速度 (m/s²)